Subject:
Year ۸۴ Month ۱۲ Date ۹

سری فوریه :

$f(x)$ تابع متناوب

$P = 2L$ دوره تناوب

$f(x)$: تکه‌ای پیوسته در $(-L, L)$ (یعنی تعداد نقاط شکستگی متناهی باشد)

* همهٔ توابع که معرفی شده دارای شرط تکه‌ای پیوسته هستند

نتیجه: با فرض شرایط فوق روابط زیر برقرار است :

سری فوریه :

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \;,\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \;,\quad n = 1, 2, \ldots$$

ضرایب سری فوریه

* هدف سری فوریه، تبدیل توابع متناوب به توابع متناوب sin ای و cos ای است.

۸ صفحه از این جزوه بدلیل خالی بودن حذف شده است و جزوه کامل می باشد.

PAPCO

Subject: Year ۸۴ Month ۱۱ Date ۹

اگر تابع زوج یا فرد باشد، سری فوریه به حالت های ساده تری تبدیل می گردد:

f فرد → 1- متقارن باشد D_f ؛ 2- $f(-x) = -f(x)$ — مثال: $\sin(-x) = -\sin x$

f زوج → 1- متقارن باشد D_f ؛ 2- $f(-x) = f(x)$

کالج
مرکز چاپ جزوات دانشگاهی
با کاملترین بانک جزوات
روبروی دانشکده فنی تهران جنوب

* فرد × فرد → زوج
* زوج × زوج → زوج
* فرد × زوج → فرد

* f فرد → $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0$
* f زوج → $\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx$

با توجه به خواص بالا در مورد توابع زوج و فرد، سری فوریه به حالت های زیر در می آید:

f فرد → $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0$

فرم سری فوریه تابع فرد:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

PAPCO

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

f زوج $\rightarrow b_1 = b_2 = \dots = 0$

فرمول سری فوریه تابع زوج:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \end{cases}$$

مثال:
سری فوریه تابع ($-\pi < x < \pi$) (تقارن دارند) تابع $\begin{cases} f(x) = x \\ P = 2\pi \end{cases}$ را بیابید.

* همواره L برابر نصف P است. در نتیجه داریم: $L = \pi$

f فرد $\rightarrow a_n = 0$

$\rightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx$

* تذکر بسیار مهم:
برای حل انتگرال‌هایی که جزء به جزء حل می‌شوند داریم:

چند جمله‌ای (مشتق ↓)	sin یا cos یا نما (انتگرال ↓)
$x \oplus$	$\sin(nx)$
$1 \ominus$	$-\frac{1}{n}\cos(nx)$
0	$-\frac{1}{n^2}\sin(nx)$

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامه حل:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n^2}\sin(n\pi)\right]$$

($\cos(n\pi) \to (-1)^n$, $\sin(n\pi) \to 0$)

* همواره: $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\sin(n\pi) = 0$

$$b_n = -\frac{2}{n}(-1)^n \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

سری فوریه $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx)$$

* چون تابع $f(x)$ فرد است، در آن sin داریم.

جملات سری: $2\sin x - \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \ldots$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

مثال: سری فوریه $f(x)=x^2$ ، $-1<x<1$ را بیابید.

* نکته بسیار مهم:

اگر دوره تناوب را نداشتیم، ۲ تا عدد بزرگتر داریم را از عدد کوچکتر کم میکنیم تا دوره تناوب به دست آید.

$P = 1-(-1) = 2 \rightarrow L = 1$

زوج $f \rightarrow b_n = 0$

$\rightarrow a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x^2 \cos(n\pi x)\,dx$ رابطه (*)

جزء به جزء

x^2 (+)	$\cos(n\pi x)$
$2x$ (−)	$\frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)$
2 (+)	$-\frac{1}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)$
0	$-\frac{1}{n^3\pi^3}\sin(n\pi x)$

$$a_n = \frac{2}{1}\left[\frac{x^2}{n\pi}\sin(n\pi x) + \frac{2x}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x) - \frac{2}{n^3\pi^3}\sin(n\pi x)\right]_0^1$$

قرار دادن کران ها: $(-1)^n$

$$a_n = 2\left[\frac{2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi)\right]$$

$$a_n = 2\left[\frac{2}{n^2\pi^2}(-1)^n\right] \rightarrow a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n \quad n \neq 0$$

دقت کنید به این شکل فرض کردیم که مخرج به ازای بعضی از مقادیر n صفر میشود، a_n را برای آن

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

مقدار n جداگانه محاسبه می‌نمائیم:

به ازای $n=0 \rightarrow a_0 = 2\int_0^1 x^2 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n \cos(n\pi x)$$

* چون تابع زوج است، برحسب cos بدست می‌آید.

مثال:
سری فوریه تابع $f(x)=\begin{cases} 1+x & -\pi<x<0 \\ 1-x & 0<x<\pi \end{cases}$ را بیابید. (تابع دوضابطه‌ای است.)

* این‌جا نیز باید دوره تناوب را حتماً بدست بیاوریم:

$P = \pi-(-\pi) = 2\pi \longrightarrow l = \pi$

حتماً باید زوج و فرد را بررسی کنیم:

$$f(-x) = \begin{cases} 1+(-x) & , -\pi<-x<0 \\ 1-(-x) & , 0<-x<\pi \end{cases} = \begin{cases} 1-x & , 0<x<\pi \\ 1+x & , -\pi<x<0 \end{cases} = f(x)$$

پس تابع زوج است و داریم: f زوج است $\rightarrow b_n = 0$

$$\rightarrow a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

وقتی که تابع زوج — ادامه حل

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

* $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (1-x)\cos(nx)\,dx$ رابطه ①

ادامه حل:

$1-x$	$\cos(nx)$
-1	$\frac{1}{n}\sin(nx)$
0	$-\frac{1}{n^2}\cos(nx)$

$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1-x}{n}\sin(nx) - \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi}$

$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-1}{n^2}(-1)^n + \frac{1}{n^2}\right]$

$\rightsquigarrow a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^{n+1}+1\right), \quad n \neq 0$

همواره پس از قرار دادن ① در n ضرایب را کنترل می‌کنیم

* صفر رابطه ① $\xrightarrow{n=0} a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$

$\rightarrow a_0 = 2-\pi$

$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)$ جاگذاری

سری فوریه $f(x)$: $= \frac{2-\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^{n+1}+1\right)\cos(nx)$

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

مثال: سری فوریه‌ی تابع

$$\begin{cases} f(x) = \cos(3x), & 0<x<\pi \\ f(x) = -f(-x), & -\pi<x<0 \end{cases}$$

را بیابید.

(به تنهایی نه زوج و نه فرد است؛ زیرا متقارن نـ...)

این شرط تابع را فرد می‌کند.

$P = 2\pi \longrightarrow l = \pi$

فرد $f \rightsquigarrow a_n = 0$

$$\rightsquigarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(3x)\sin(nx)\,dx$$

یادآوری:

* تکرار:

دسته‌ی دوم اتحادهای موجود در ریاضی مهندسی ضرب توابع مثلثاتی sin و cos است که:

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B)+\sin(A-B)\right]$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B)+\cos(A-B)\right]$$

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(n+3)x+\sin(n-3)x\right]dx$$ ادامه‌ی حل: رابطه‌ی ①

فاکتورگیری از منفی ⊖

$$b_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+3}\cos(n+3)x+\frac{1}{n-3}\cos(n-3)x\right]_0^{\pi}$$

PAPCO

ادامه‌ی حل

دانشجویان مهندسی پزشکی| WWW.BMESTU.IR

مثال:

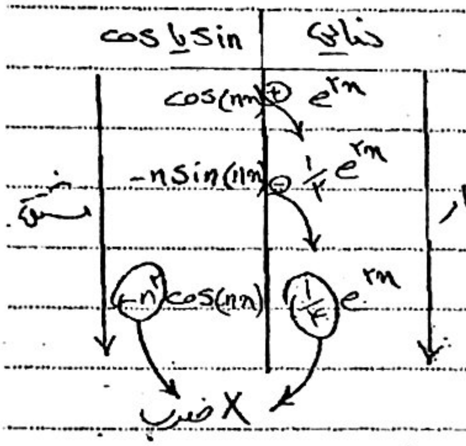
سری فوریه‌ی تابع $-\pi<x<\pi$ تابع $f(x)=e^{2x}$ را بیابید.

$P=2\pi \longrightarrow l=\pi$

تابع f نه زوج و نه فرد است. $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\cos(nx)\,dx$

* تذکر بسیار مهم: (فرمول در صفحه‌ی ۱۱ کتاب)

دسته‌ی سوم توابع که باید در ریاضی مهندسی انتگرال گرفت ضرب e^{nx} در توابع مثلثاتی sin و cos است.



$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\frac{1}{2}e^{2x}\cos(nx)+\frac{n}{4}e^{2x}\sin(nx)}{(1)-\left(-\frac{n^2}{4}\right)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

(sin → ۰)

۱ ← طبق فرمول

ضرب دو ضریب آخر در جدول

* نکته: $(-1)^{-n}=(-1)^n$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\frac{1}{2}e^{2\pi}\cos(n\pi)-\frac{1}{2}e^{-2\pi}\cos(-n\pi)}{1+\frac{n^2}{4}}\right]$$

($\cos(n\pi)\to(-1)^n$)

ادامه‌ی حل ←

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامه حل ←

$$a_n = \frac{2(-1)^n}{\pi(n^2+4)} \times \left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right)$$

$$\left(e^{2\pi} - e^{-2\pi}\right) \to 2\sinh(2\pi)$$

$$\rightarrow a_n = \frac{4(-1)^n \sinh(2\pi)}{\pi(n^2+4)}$$

← نمی‌توانستیم در جمع n ای مشابه قرار دهیم بلکه می‌توانیم از رابطهٔ فوق مقدار a_0 را بیابیم.

$$n=0 \rightarrow a_0 = \frac{\sinh(2\pi)}{\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{2x}\sin(nx)\,dx = \dots$$

* درس تا صفحهٔ ۲۰ کتاب گفته شده است و جلسهٔ آینده تا صفحهٔ ۲۶ بخوانید.

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

تمرین ۱:

سری فوریه تابع $-\pi < x < \pi$ ، $f(x) = x - x^2$ را بیابید.

تمرین ۲:

سری فوریه تابع $-1 < x < 1$ ، $f(x) = \sinh x$ را بیابید.

تمرین ۳:

سری فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 , & -\pi < x < 0 \\ -x^2 , & 0 < x < \pi \end{cases}$$

را بیابید.

تمرین ۴:

سری فوریه تابع

$$f(x) = \begin{cases} f(x) = \sin(x), & 0 < x < \pi \\ f(x) = f(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

را بیابید.

تمرین ۵:

سری فوریه تابع $-\pi < x < \pi$ ، $f(x) = \cos(3x)$ را بیابید.

Subject:
Year. ۸۴ Month. ۱۲ Date. ۹

سؤال:

آیا حاصل سری فوریه $f(x)$ با $f(x)$ در نقطه x برابر است؟

قضیه:

f متناوب با دوره تناوب $P=2L$
f در محدوده $-L < x < L$ تکه‌ای پیوسته باشد.

→ f سری فوریه دارد → حاصل سری فوریه $f(x)$ در نقطه x_0

$$\rightarrow = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) + \lim_{x \to x_0^-} f(x)\right)$$

نتیجه: f پیوسته باشد ⇐ $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

→ حاصل سری فوریه در نقطه x_0 → $= f(x_0)$

کالج
مرکز چاپ جزوات دانشگاهی
با کاملترین بانک جزوات
روبروی دانشکده فنی تهران جنوب ۸۸۹۸۲۸۰

PAPCO

Subject .
Year . ۸۴ Month . ۱۲ Date . ۱۶ ( )

مثال :

سری فوریه تابع
$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -\pi<x<0\\ 1-x, & 0<x<\pi\end{cases}$$
را بیابید و حاصل سری فوریه را به ازای $x_0=0$ و $x_0=1$ و $x_0=5$ و $x_0=\pi$ و $x_0=8\pi$ را بدست آورید.

* $P=2\pi$

$$\left(1-\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^{n+1}+1\right)}{\pi n^2}\cos(nx)=$$ سری فوریه $f(x)$ (طبق قبل)

*تذکر : اگر x نقطه‌ی شکستگی نباشد آنگاه حاصل سری $f(x_0)$ می‌شود. و اگر نقطه شکستگی باشد سری با $\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0^+}f(x)+\lim_{x\to x_0^-}f(x)\right)$ برابر خواهد شد.

نقطه شکستگی

$$\boxed{x=0}\rightarrow\left(1-\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^{n+1}+1\right)}{\pi n^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0^+}f(x)+\lim_{x\to x_0^-}f(x)\right)$$
$$=\frac{1}{2}(1+1)=1$$

نقطه پیوسته

$$\boxed{x=1}\rightarrow\left(1-\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^{n+1}+1\right)}{\pi n^2}\cos(n)=f(1)=0$$

نقطه پیوسته

خواص توابع متناوب

$$\boxed{x=5}\rightarrow\left(1-\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^{n+1}+1\right)}{\pi n^2}\cos(5n)=f(5)=f(5-2\pi)$$

دوره تناوب

ضابطه اول

$$=1+(5-2\pi)=6-2\pi$$

ادامه حل -

Subject.
Year. ۸۴ Month. ۱۲ Date. ۱۹(۱)

ادامه حل:

نقطه گسستگی

$$\boxed{x=\pi} \rightarrow \left(1-\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^{n+1}+1\right)}{\pi n^2}\cos(n\pi)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\pi^+}f(x)+\lim_{x\to\pi^-}f(x)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to-\pi^+}f(x)+\lim_{x\to\pi^-}f(x)\right)=\frac{1}{2}\left((1+(-\pi))+(1-\pi)\right)=1-\pi$$

* نقطه‌ای است که چپ و راست آن حد دارد. چون بازه π^+ را نداریم از خاصیت تابع متناوب استفاده می‌کنیم و $\pi^+ - 2\pi$ را می‌نگاریم.

نقطه گسستگی

$$\boxed{x=8\pi} \rightarrow \left(1-\frac{\pi}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^{n+1}+1\right)}{\pi n^2}\cos(8n\pi)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 8\pi^+}f(x)+\lim_{x\to 8\pi^-}f(x)\right)$$

در بازه نیستند

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0^+}f(x)+\lim_{x\to 0^-}f(x)\right)=\frac{1}{2}(1+1)=1$$

$8\pi^+ - 4(2\pi)$ دوره تناوب، $8\pi^- - 4(2\pi)$ دوره تناوب

* برای این مسئله تمام $K\pi$ ها با توجه به دامنه تابع که از $-\pi$ تا π است، نقطه گسستگی می‌شوند.

* برای کم کردن نقطه فقط از دوره تناوب P استفاده می‌کنیم نه از L

مثال:

سری فوریه‌ی تابع

$$\begin{cases} f(x) = x^2 , & -1 < x < 1 \\ P = 2 \end{cases}$$

را بیابید و به کمک آن حاصل

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ را محاسبه کنید.

* در ریاضی ① فقط می‌توانستیم بگوییم سری‌های فوق همگرا هستند یا واگرا ولی در این جا مقدار آن‌ها را نیز می‌توانیم به دست آوریم.

سری فوریه تابع $f(x)$ (جلسه‌ی قبل) $= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x)$

اگر به جای $x = 0$ بگذاریم می‌توانیم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ را از سری فوق به دست آوریم.

پیوستگی

$$\boxed{x=0} \rightarrow \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = f(0) = 0$$

$$\rightarrow \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$$

نقطه‌ی ناپیوستگی

$$\boxed{x=1} \rightarrow \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \to 1^+} f(x) + \lim_{x \to 1^-} f(x) \right)$$

در حاره نیست و از خواص تابع متناوب استفاده می‌کنیم

$$\frac{1}{2} \left(\lim_{x \to -1^+} f(x) + \lim_{x \to 1^-} f(x) \right) = \frac{1}{2} \left((-1)^2 + (1)^2 \right) = 1$$

$$\rightarrow \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

سؤال:

آیا می‌توان سری فوریه $f(x)$ را در فاصله‌ای غیر از $(-L\,,\,L)$ به دست آورد؟ بله

قضیه:

فرض کنیم $f(x)$ متناوب با دوره‌ی تناوب $P=2L$ باشد در این صورت:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{0}^{2L} f(x)\,dx = \int_{L}^{3L} f(x)\,dx = \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{5L}{2}} f(x)\,dx = \dots = \int_{a-L}^{a+L} f(x)\,dx$$

* یعنی به جای کران ۰، هر مقداری را می‌توان به دلخواه قرار داد.

PAPCO

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

مثال:

سری فوریه‌ی تابع $f(x) = \begin{cases} 1 , & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 , & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ را بیابید سپس به کمک آن

نشان دهید:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

(صفحه ۲۵۴ مسائل آخر، سؤال ۳ ترم پیش) :

* همانطور که می‌بینیم دامنه متقارن نیست و داریم:

$$P = \frac{3\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi \rightarrow L = \pi$$

* تابع f نه زوج است و نه فرد:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

مشکل این جاست که $-\pi$ در بازه نیست.

طبق تذ ۱ → $\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos(nx)\,dx$ بازه‌ها را می‌شکنیم تا $f(x)$ بدست آید.

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1)\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (0)\cos(nx)\,dx$$

زوج ، → ۰

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\,dx$$

ادامه حل ← PAPCO

ادامه حل:

$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(nx)\,dx$ (*) رابطه ۱

$=\frac{2}{n\pi}\left[\sin(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \rightarrow a_n=\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),\ n\neq 0$

* فقط به جای $\sin(nx)=0$ و $\cos(nx)=(-1)^n$ جایگذاری می کنیم ولی در انتگرال معمولاً اصلاً دست به مثلثاتی ها دست نمی زنیم

(*) در رابطه ۱ جایگذاری $n=0$ $\rightarrow a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx \Rightarrow a_0=1$

$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,dx$

$\xrightarrow{\text{طبق تعریف}}\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}f(x)\sin(nx)\,dx$

$=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1)\underbrace{\sin(nx)}_{\text{فرد}}\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(0)\sin(nx)\,dx$

$\rightarrow b_n=0$

$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right)$

PAPCO ادامه حل →

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامه حل:

حال a_n و b_n و a_0 را جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x) \text{ سری فوریه} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(nx)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} \cos(nx)$$

* هر وقت در صورت سؤال سری را باز بود یعنی جمع چند عدد را داشتیم سری را باز می‌کنیم تا ببینیم به ازای چه مقدار x، باز شده صورت سؤال را می‌دهد.

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\cos(x) - \frac{1}{3}\cos(3x) + \frac{1}{5}\cos(5x) - \frac{1}{7}\cos(7x) + \cdots \right)$$

حال اگر $x=0$ را بگذاریم، سری باز شده صورت سؤال بدست می‌آید:

نقطه پیوستگی

$$\boxed{x=0} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = f(0) = 1$$

(سنت) مقدار سری فوریه در نقطه ۰

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

سوال :

آیا می‌توان سری فوریه $f(x)$ را در محدوده $0 < x < l$ نوشت بطوریکه سری فوریه $f(x)$ فقط سینوسی یا فقط کسینوسی باشد؟

بله سری فوریه تابع فوق را هم به صورت سینوسی و هم به صورت کسینوسی می‌توان نوشت:

توسیع (گسترش) زوج یا فرد :

توسیع زوج :

فرض کنیم $f(x)$ تابعی در محدوده $0 < x < l$ باشد. تابع جدید $f^*(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$
\begin{cases}
f^*(x) = \begin{cases} f(x) , & 0 < x < l \\ f(-x) , & -l < x < 0 \end{cases} \\
P = 2l
\end{cases}
$$

$$
f^*(-x) = \begin{cases} f(-x) , & 0 < -x < l \\ f(x) , & -l < -x < 0 \end{cases} = \begin{cases} f(-x) , & -l < x < 0 \\ f(x) , & 0 < x < l \end{cases}
$$

PAPCO

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

f^* تابع زوج است در نتیجه سری فوریه آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} f^*(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f^*(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \end{cases}$$

چون $0<x<l$ قرار دارد $\longrightarrow f^*(x) = f(x)$

سری فوریه کسینوسی: $\longrightarrow$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \end{cases}$$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

توسیع (گسترش) فرد:

فرض کنیم $f(x)$ در محدوده $0<x<l$ باشد، تابع جدید $f^*(x)$

را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x) & , \quad 0<x<l \\ -f(-x) & , \quad -l<x<0 \end{cases}$$

f^* فرد است $\longrightarrow$
$$\begin{cases} f^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f^*(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \end{cases}$$

$$0<x<l \longrightarrow f^*(x)=f(x)$$

سری فوریه سینوسی f $\longrightarrow$
$$\begin{cases} f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \\ b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx \end{cases}$$

Subject:
Year. ۸۴ Month. ۱۲ Date. ۱۹

مثال:

سری فوریهٔ کسینوسی $f(x)=x \quad 0<x<\pi$ را بیابید.

تابع فرد است، در سری فوریهٔ سینوسی داریم $a_n=0$ زیرا

* تکنیک بسیار بسیار مهم:

هرگاه بخواهیم سری فوریهٔ سینوسی یا کسینوسی یک تابع را بدست آوریم، بسته

مقدار بازه برابر با L می‌باشد.

$L=\pi$

x	$+$	$\cos(nx)$
1	$-$	$\frac{1}{n}\sin(nx)$
0		$-\frac{1}{n^2}\cos(nx)$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx \quad (*) \text{ رابطهٔ}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx)+\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} \rightarrow a_n=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right) \quad n\neq 0$$

n=0 را در رابطهٔ ۱ جاگذاری $\rightarrow a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx$

$$\rightarrow a_0=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}\right)=\pi$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{\pi n^2}\cos(nx)$$

Subject:
Year. ۸۴ Month. ۱۲ Date ۱۹

حل تمرین ۵ جلسه قبل:

سری فوریه $-\pi < x < \pi$ $f(x) = \cos(3x)$ را بیابید. $L = \pi$

f زوج است $\longrightarrow b_n = 0$

دفتر فنی ایلیا ۳۳۶۹۸۷۲۱ ۲۵ متری ۵۰ حافظی پاساژ دانشجو پلاک ۵

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(3x)\cos(nx)\,dx$$

* تذکر مهم:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} \frac{L}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

طبق تذکرات بالا:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(3x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\begin{cases} \frac{\pi}{2} & n = 3 \\ 0 & n \neq 3 \end{cases} = \begin{cases} 1, & n = 3 \\ 0, & n \neq 3 \end{cases}$$

$$a_3 = 1, \quad a_0 = a_2 = a_4 = \dots = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = a_3 \cos(3x) = \cos(3x)$$

PAPCO

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

جلسه سوم تمرینی:

صورت مختلط سری فوریه:

صورت مختلط سری فوریه ←

$f(x)$ متناوب با دوره تناوب ۲L باشد:

$f(x)$ سری فوریه دارد ←

$f(x)$ در محدوده ۲L انتگرال‌پذیر باشد

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} \\ c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\, dx \end{cases} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ضرایب مختلط سری فوریه

رابطه بین ضرایب حقیقی و مختلط:

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n}, & n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n = i\left(c_n - c_{-n}\right), & n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Subject.
Year. ۸۴ Month. ۱۲ Date. ۲۴

مثال:

صورت مختلط سری فوریه $f(x) = x$ ، $-\pi < x < \pi$ را بیابید و از روی

آن صورت حقیقی را بدست آورید.

$P = 2\pi \rightarrow L = \pi$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx}\, dx \quad (*) \text{ رابطه}$$

x ⊕	e^{-inx}
1 ⊖	$\frac{-1}{in} e^{-inx}$
0	$\frac{-1}{n^2} e^{-inx}$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-x}{in} e^{-inx} + \frac{1}{n^2} e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\pi}{in} e^{-in\pi} + \frac{1}{n^2} e^{-in\pi} - \frac{\pi}{in} e^{in\pi} - \frac{1}{n^2} e^{in\pi}\right]$$

(each exponential → $(-1)^n$)

یادآوری مهم:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{in\pi} = \cos(n\pi) + i\sin(n\pi) = (-1)^n$$

$$e^{-in\pi} = \cos(n\pi) - i\sin(n\pi) = (-1)^n$$

ادامه حل ←

PAPCO

Subject:
Year. ۸۴ Month. ۱۲ Date. ۲۳

ادامهٔ حل:

حال از $(-1)^n$ ٤ در c_n فاکتور می‌گیریم:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-2\pi}{in}(-1)^n\right] \Rightarrow c_n = \frac{-(-1)^n}{in}, \quad n \neq 0$$

حال $n = 0$ را در رابطهٔ * جایگذاری می‌کنیم:

$$* \xrightarrow{n=0} c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0$$

با توجه به اینکه کران‌ها متقارن‌اند فرد

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} c_n e^{inx} + c_0$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-(-1)^n}{in} e^{inx}$$ صورت مختلط سری فوریه:

$* \; (-1)^{-n} = (-1)^n$ تذکر خیلی مهم

قسمت دوم سؤال:

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{-(-1)^n}{in} + \frac{-(-1)^n}{-in} = \frac{-(-1)^n}{in} + \frac{(-1)^n}{in} = 0$$

$$a_0 = c_0 + c_0 = 0$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i\left(\frac{-(-1)^n}{in} - \frac{(-1)^n}{in}\right) = \frac{-2(-1)^n}{n}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^n}{n}\sin(nx)$$

صورت حقیقی سری فوریه

PAPCO

Subject.
Year. ۸۳ Month. ۱۲ Date. ۲۳

«انتگرال فوریه»:

برای توابعی است که از $-\infty$ تا $+\infty$ باشند و شرایط داشتن انتگرال فوریه به صورت زیر است:

شرایط انتگرال فوریه:

۱- تابع $f(x)$ تابعی تکه‌ای پیوسته در محدوده $-\infty < x < \infty$

۲- $f(x)$ در محدوده $-\infty < x < \infty$ مطلقاً انتگرال پذیر باشد (یعنی قدر مطلق اش نیز انتگرال داشته باشد):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \text{عدد متناهی}$$

با داشتن شرایط فوق تابع $f(x)$ دارای انتگرال است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \left(a(\omega)\cos(\omega x) + b(\omega)\sin(\omega x)\right) d\omega$$

(امگا)

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\, dx$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\, dx$$

$a(\omega)$ و $b(\omega)$ → ضرایب حقیقی انتگرال فوریه

PAPCO ادامه

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

فرد $f \rightarrow a(\omega)=0$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=\int_0^\infty b(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega \\ b(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)\,dx \end{array}\right.$$

→ فرمول انتگرال فوریه تابع فرد

زوج $f \rightarrow b(\omega)=0$

$$\left\{\begin{array}{l} f(x)=\int_0^\infty a(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega \\ a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\,dx \end{array}\right.$$

→ فرمول انتگرال فوریه تابع زوج

قضیای همگرایی:

حاصل انتگرال فوریه در نقطه x_0 $= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right)$

نتیجه: f در x پیوسته باشد ⇐ حاصل انتگرال فوریه در نقطه x_0 $= f(x_0)$

Subject:
Year. ۸۴ Month. ۱۲ Date. ۲۳

مثال: (صفحه ۲۴۹ کتاب)

ابتدا انتگرال فوریه تابع $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1\end{cases}$ را بیابید.

($-1<x<1$ ؛ $x>1$ یا $x<-1$)

سپس به کمک آن مقدار $\int_0^\infty \frac{\omega\cos(\omega)-\sin(\omega)}{\omega^3}\cos(\frac{\omega}{2})d\omega$ را بیابید.

تذکر بسیار مهم:

اولین کار در انتگرال فوریه این است که به جای xهای انتگرال، ω را قرار دهیم.

سپس باید ببینیم تابع در انتگرال زوج است یا فرد.

$$f(-x)=\begin{cases}1-(-x)^2, & |-x|<1 \\ 0, & |-x|>1\end{cases}=\begin{cases}1-x^2, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

در نتیجه تابع f زوج است و داریم:

f زوج است $\rightarrow b(\omega)=0$

$$\rightarrow a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\,dx$$

($\frac{2}{\pi}$: در فرمول)

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-x^2)\cos(\omega x)\,dx+\frac{2}{\pi}\int_1^\infty(0)\cos(\omega x)\,dx$$

(۰) * چون تابع چند ضابطه‌ای بود، ما نیز کران $\int$ را به ازای کران هر ضابطه می‌شکنیم.

ادامه حل ←

Subject:
Year. ۸۴ Month. ۱۲ Date. ۲۴

ادامه حل:

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-x^2)\cos(\omega x)\,dx$$

$1-x^2$ (+)	$\cos(\omega x)$
$-2x$ (−)	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)$
-2 (+)	$-\frac{1}{\omega^2}\cos(\omega x)$
0	$-\frac{1}{\omega^3}\sin(\omega x)$

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1-x^2}{\omega}\sin(\omega x)-\frac{2x}{\omega^2}\cos(\omega x)+\frac{2}{\omega^3}\sin(\omega x)\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{-2}{\omega^2}\cos(\omega)+\frac{2}{\omega^3}\sin(\omega x)\right]$$

$$=\frac{-4}{\pi}\left(\frac{\omega\cos\omega-\sin(\omega)}{\omega^3}\right) \rightarrow$$ * حتماً باید عبارت داخل انتگرال بدست بیاید

انتگرال فوریه‌ی $f(x)$:

$$f(x)=\int_0^\infty a(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega=\frac{-4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^3}\cos(\omega x)\,d\omega$$

* حال می‌بینیم چه مقدار x، انتگرال صورت سؤال را می‌سازد:

نقطه‌ی پیوستگی

$$x=\frac{1}{3} \rightarrow \frac{-4}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^3}\cos\left(\frac{\omega}{3}\right)d\omega$$

$$=f\left(\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\omega\cos\omega-\sin\omega}{\omega^3}\,d\omega=\frac{-2\pi}{9}$$

Subject:
Year ۸۴ Month. ۱۲ Date. ۲۳

مثال ترم قبل:

به کمک انتگرال فوریه ثابت کنید:

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\cos(\omega x)+\frac{\omega}{1+\omega^2}\sin(\omega x)\right)d\omega=\begin{cases}\pi e^{-x} & x>0\\ \frac{\pi}{2} & x=0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

*تذکر مهم:
فقط در نقاط پیوستگی تابع برابر با انتگرالش می‌شود.

با توجه به تذکر فوق: برای این است که کران ٤ را بنویسیم

فرض کنیم $f(x)=\begin{cases}\pi e^{-x} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$ و چون هم sin و هم cos و هم cos داریم،

تابع f نه زوج است و نه فرد:

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(\omega x)\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}(0)\cos(\omega x)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\pi e^{-x}\cos(\omega x)\,dx$$

چون تابع چند ضابطه‌ای است کران ٤ را می‌شکنیم.

$\cos(\omega x) \quad (+) \quad e^{-x}$

$-\omega\sin(\omega x) \quad (-) \quad -e^{-x}$

$-\omega^2\cos(\omega x) \quad e^{-x}$

PAPCO ← ادامهٔ حل

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامه‌ی حل:

$$a(\omega) = \left[\frac{-e^{-x}\cos(\omega x) + \omega e^{-x}\sin(\omega x)}{1-(-\omega^2)}\right]_0^{\infty}$$

$$a(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \pi e^{-x}\sin(\omega x)\,dx$$

$\sin(\omega x)$	$+\ e^{-x}$
$\omega\cos(\omega x)$	$-\ -e^{-x}$
$-\omega^2\sin(\omega x)$	e^{-x}

$$b(\omega) = \left[\frac{-e^{-x}\sin(\omega x) - \omega e^{-x}\cos(\omega x)}{1+\omega^2}\right]_0^{\infty} = \frac{\omega}{1+\omega^2}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty}\left(a(\omega)\cos(\omega x) + b(\omega)\sin(\omega x)\right)d\omega$$

$$= \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+\omega^2}\cos(\omega x) + \frac{\omega}{1+\omega^2}\sin(\omega x)\right)d\omega$$

نقطه‌ی شکستگی

$x=0$ → انتگرال فوریه $= \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x\to 0^-} f(x)\right)$

برای اثبات مقدار تابع در ۰ $= \frac{1}{2}(\pi + 0) = \frac{\pi}{2}$

Subject:
Year. ۸۴ Month. ۱۲ Date. ۲۳

بسط نیم دامنه‌ای (توسیع زوج یا فرد) در انتگرال فوریه:

فرض کنیم $f(x)$ تابعی تکه‌ای پیوسته (مطلقاً انتگرال‌پذیر) در محدوده $0<x<\infty$ باشد.

یعنی قدر مطلقش انتگرال‌پذیر باشد.

در این صورت انتگرال فوریه $f(x)$ را می‌توان به دو شکل زیر نوشت:

انتگرال فوریه کسینوسی (توسیع زوج):

در این روش تابع جدید $f^*(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^*(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x<\infty \\ f(-x), & -\infty<x<0 \end{cases}$$

کالج
مرکز چاپ جزوات دانشگاهی
با کاملترین بانک جزوات
روبروی دانشکده فنی تهران جلوب

زوج $f^* \rightarrow$
$$\begin{cases} f^*(x)=\int_0^\infty a(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega \\ a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f^*(x)\cos(\omega x)\,dx \end{cases}$$

$0<x<\infty$:

انتگرال فوریه کسینوسی f
$$\begin{cases} f(x)=\int_0^\infty a(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega \\ a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)\,dx \end{cases}$$

دانشجویان مهندسی پزشکی| WWW.BMESTU.IR

انتگرال فوریه سینوسی (توسیع فرد):

مطابق روش توسیع زوج می توان نوشت:

$$f(x) = \int_0^\infty b(w) \sin(wx)\, dw$$

$$b(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin(wx)\, dx$$

↓

انتگرال فوریه سینوسی f

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

مثال: (مسئله ۱۰، صفحه ۲۸۶ کتاب)

به کمک انتگرال فوریه کسینوسی $x>0$ و $f(x)=\frac{\pi}{2}e^{-x}$ ثابت کنید:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\omega)}{1+\omega^2}\,d\omega=\frac{\pi}{2e}$$

(x به ω تغییر)

* تابع فوق که زوج است و به فرد یعنی هم بسط sin ای و هم بسط cos ای دارد:

$$a(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\pi}{2}e^{-x}\cos(\omega x)\,dx$$

به کمک جدول

$$=\left[\frac{-e^{-x}\cos(\omega x)+\omega e^{-x}\sin(\omega x)}{1+\omega^2}\right]_0^\infty=\frac{1}{1+\omega^2}$$

$$f(x)=\int_0^\infty a(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega$$ انتگرال فوریه کسینوسی تابع f

نقطه پیوستگی

$$\boxed{x=1}\Rightarrow\int_0^\infty \frac{\cos(\omega)}{1+\omega^2}\,d\omega=f(1)=\frac{\pi}{2e}$$

(-) فقط در $x=1$ است که می‌توان انتگرال فوریه را به صورت انتگرال داده شده در صورت سؤال به دست آورد.

Subject:
Year. ۸۴ Month. ۱۲ Date. ۲۳

مثال:
به کمک انتگرال فوریه ثابت کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\cos(\omega x)\,d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0<x<1 \\ \frac{\pi}{4} & x=1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$$

* فرض کنیم

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases}$$

حل: چون $f(x)$ در محدوده $0<x<\infty$ قرار دارد لذا هم دارای انتگرال فوریه‌ی sinای و هم cosای داریم. ولی چون طرف دیگر تساوی که دارای $\cos(\omega x)$ هستیم لذا انتگرال فوریه cosای تابع را تشکیل می‌دهیم.

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{1} \frac{\pi}{2}\cos(\omega x)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_1^{\infty}(0)\cos(\omega x)\,dx$$

چون تابع صفر است

$$= \left[\frac{1}{\omega}\sin(\omega x)\right]_0^1 = \frac{\sin(\omega)}{\omega}$$

ادامه حل =

PAPCO

Subject:
Year. ۸۴ Month. ۱۲ Date. ۲۳

ادامه حل:

$$f(x) = \int_0^\infty a(\omega)\cos(\omega x)\,d\omega$$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(\omega)}{\omega}\cos(\omega x)\,d\omega$$

نقطه ناپیوستگی

$x = 1$ → انتگرال $= \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to 1^+} f(x) + \lim_{x \to 1^-} f(x)\right) =$

برای اثبات پیوسته بودن تابع در این نقطه

با توجه به خواص توابع متناوب

$$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

PAPCO

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

صورت مختلط انتگرال فوریه:

$f(x)$ در محدوده‌ی $-\infty < x < \infty$ تکه‌ای پیوسته و مطلقاً انتگرال‌پذیر است.

در این صورت: صورت مختلط انتگرال فوریه ⇐

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

ضریب مختلط انتگرال فوریه

روابط این ضرایب با ضرایب حقیقی ⇐

$$\begin{cases} a(\omega) = c(\omega) + c(-\omega) \\ b(\omega) = i\,(c(\omega) - c(-\omega)) \end{cases}$$

Subject.
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۱۲/۱/۱

معادله‌ی موج (ارتعاش):

معادله‌ی موج: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$

حل معادله‌ی موج متناهی:

نخی به طول L را بر روی محور xها در محدوده‌ی $0 < x < L$ قرار می‌دهیم. فرض کنیم نخ کشسان باشد (یعنی در برابر نیرو از خود مقاومت نشان دهد و سریع پاره نشود)

نخ را از حالت اولیه خود خارج کرده و آن را به ارتعاش در می‌آوریم. در این صورت $u(x,t)$ (جواب معادله‌ی موج) مکان نقطه‌ی x از نخ نسبت به زمان را نشان می‌دهد.

معادله‌ی ارتعاش نخ متناهی حل نخواهد شد مگر اینکه شرایط زیر برای معادله‌ی موج داده شده باشد:

شرایط معادله‌ی موج:

شرایط اولیه:
- $u(x,0) = f(x)$ ($t=0$) حالت اولیه‌ی نخ (در لحظه‌ی صفر)
- $u_t(x,0) = g(x)$ سرعت اولیه‌ی ارتعاش

شرایط مرزی:
- $u(0,t) = p(t)$ ارتعاش در ابتدای نخ
- $u(L,t) = q(t)$ ارتعاش در انتهای نخ

هرگاه $p(t)$ و $q(t)$ تواماً با هم صفر باشند مرز معادله‌ی موج را همگن می‌نامیم.

دفتر فنی ایلیا ۳۳۶۹۸۷۲۱ ۴۵ متری ده حتی پاساژ دانشجو پلاک ۵

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

برای حل معادلهٔ موج سه مرحله کار را انجام می‌دهیم:

۱- همگن کردن معادله (در سؤال اتفاقی هیچ‌گاه همگن نمی‌دهند و همواره ناهمگن می‌دهند)

۲- ایجاد یک سری از فرم جواب

۳- حل معادله.

دفتر فنی ایلیا
۳۳۶۹۸۷۲۱
۲۵ متری ده‌متری پاساژ دانشجو پلاک ۵

در شیوهٔ تدریس از مرحلهٔ سوم شروع به حل و گفتن می‌کنیم:

حل معادلهٔ موج با مرز همگن:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$$

شرایط معادلهٔ موج متناهی:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$$

$u(0,t) = u(L,t) = 0$: شرایط مرزی همگن

* وقتی مرز همگن است که دو سرش ثابت باشد.

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۱۵

وقتی شرایط مرزی همگن صادق باشند، در این حالت ابتدا فرم جواب معادله را به

یکی از چهار حالت زیر تشکیل می‌دهیم:

شرایط مرزی $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases}$ ⟶ فرم جواب: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin(\frac{n\pi}{L}x)$

شرایط مرزی $\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(L,t)=0 \end{cases}$ ⟶ فرم جواب: $u(x,t)=G_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos(\frac{n\pi}{L}x)$

شرایط مرزی $\begin{cases} u(0,t)=0 \\ u_x(L,t)=0 \end{cases}$ ⟶ فرم جواب: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin(\lambda_n x)$

$$\lambda_n=\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{L}$$

شرایط مرزی $\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{cases}$ ⟶ فرم جواب: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos(\lambda_n x)$

حال فرم جواب‌های فوق را در معادله صدق می‌دهیم تا تابع مجهول $G_n(t)$

معلوم شود.

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۹ Month. ۱ Date. ۱۵ ( )

مثال: معادلهٔ موج زیر را با شرایط داده شده حل کنید:

$u_{tt} - 4u_{xx} = x + 2t$

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin(2x) \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

مرزهای همگن است.

$L = \pi$

حل:

هدف یافتن $G(t)$ است: فرم جواب: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin(nx)$

اولین کار قرار دادن فرم جواب در معادله است:

مشتق‌گیری ۲ بار نسبت

$u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{G}_n(t)\sin(nx)$

$u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 G_n(t)\sin(nx)$

از $\sin(nx)$، ۲ بار مشتق گرفته‌ایم

$u_{tt} - 4u_{xx} = x + 2t \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{G}_n(t)\sin(nx) - 4\sum_{n=1}^{\infty} -n^2 G_n(t)\sin(nx)$

$= x + 2t$

حال از $\sum_{n=1}^{\infty}$ فاکتور می‌گیریم:

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\ddot{G}_n(t) + 4n^2 G_n(t)\right)\sin(nx) = x + 2t$ سری فوریهٔ سینوسی

PAPCO ادامه ←

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۱۸

ادامه حل: سری فوریه سینوسی $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ddot{G}_n(t)+4n^2G_n(t)\right)\sin(nx)=x+2t$

یادآوری: سری فوریه سینوسی $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

از دل $\sum$ (سیگما) مقدار ضریب (یعنی b_n) جدا می‌کنید.

* برای حل معادله موج به ۳ سری فوریه $\sin$ دار و یا $\cos$ دار برخورد می‌کنیم که یکی برای خود معادله و ۲ تا برای یافتن a_n و b_n است.

$$\rightarrow \ddot{G}_n(t)+4n^2G_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+2t)\sin(nx)\,dx$$

چون می‌خواهیم انتگرال را محاسبه نکنیم و به جایش یک اسم قرار دهیم و چون G بر حسب t می‌باشد باید ابتدا $2t$ را از داخل انتگرال در آوریم و به همین علت به ۲ انتگرال جزء تجزیه می‌کنیم:

$$=\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx}_{H_n}+t\,\underbrace{\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx}_{K_n}$$

زیرا H_n قرار دارد چون که به جای x متغیر دیگری به نام n جای می‌ماند که انتگرال به آن وابسته است.

PAPCO

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت: $\ddot{G}_n(t) + 4n^2 G_n(t) = H_n + t K_n$

یادآوری:

معادله‌ی خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت:

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = f(t)$$

معادله‌ی مشخصه (کمکی) = $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

(i): دو ریشه‌ی λ_1, λ_2 دارد: → $y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + y^*$

(ii): یک ریشه‌ی $\lambda_1 = \lambda_2$ دارد → $y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t} + y^*$

(برای معادله‌ی موج) ریشه‌های مختلط $\alpha \pm i\beta$ دارد → $y = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t) + y^*$

(برای معادله‌ی لاپلاس) دو ریشه‌ی قرینه‌ی $\lambda_1 = -\lambda_2$ دارد → $y = c_1 \cosh(\lambda_1 t) + c_2 \sinh(\lambda_1 t) + y^*$

تذکر مهم: y^* یک جواب خصوصی معادله‌ی ناهمگن است.

ادامه‌ی حل: معادله‌ی مشخصه = $\lambda^2 + 4n^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2ni \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2n \end{cases}$

رابطه‌ی (1): $G_n(t) = a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt) + G_n^*(t)$

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۱۵

تذکر: $\ddot{G}_n(t) + 4n^2 G_n(t) = H_n + tK_n$

به احتمال زیاد در امتحان به صورت زیر می دهند:

اگر طرف دوم معادله t وجود نداشت یا توان t برابر یک بود برای محاسبه ی جواب خصوصی

می توان طرف دوم را بر ضریب G_n تقسیم نمود.

پس: $G_n^*(t) = \dfrac{H_n + tK_n}{4n^2}$ رابطه ی ②

↓

ضریب $G_n(t)$

دفتر فنی ایلیا
۳۳۶۹۸۷۲۱
۴۵ متری ده دقی پاساژ دانشجو پلاک ۵

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \sin(nx)$$

حال روابط ① و ② را جایگذاری می کنیم:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt) + \frac{H_n + tK_n}{4n^2}\right) \sin(nx)$$

«جواب معادله»

مشکل ما در جواب فوق مجهول بودن a_n و b_n است و برای یافتن a_n و b_n از

شرایط اولیه ی مسئله استفاده می کنیم:

* در جواب معادله ی $u(x,t)$ به جای t صفر قرار می دهیم → $u(x,0) = \sin(2x)$

سری فوریه ی سینوسی: $t=0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{H_n}{4n^2}\right) \sin(nx) = \sin(2x)$

PAPCO : ادامه ی حل

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامه حل:

حال برای یافتن ضرایب، بسط فوریه سینوسی داریم:

$$a_n + \frac{Hn}{4n^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(2x)\sin(nx)\,dx$$

(L = π، انتگرال = P_n)

$$\to a_n = P_n - \frac{Hn}{4n^2}$$

طبق شکل داده شده در صفحه ۲۶ جزوه $P_n = \frac{2}{\pi}\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & n=2\\ 0, & n\neq 2\end{cases} = \begin{cases}0, & n=2\\ 1, & n\neq 2\end{cases}$

$P_2=1,\ P_1=P_3=P_4=\dots=0$

حال بجای t صفر قرار داده و پس از مشتق $u(x,0)$ نسبت به t می‌گیریم → فرض مسئله: $u_t(x,0)=0$

$$\Rightarrow u_t(x,0)=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(2nb_n + \frac{Kn}{4n^2}\right)\sin(nx) = 0$$ طبق بسط فوریه سینوسی

$$\to 2nb_n + \frac{Kn}{4n^2} = 0 \Rightarrow b_n = -\frac{Kn}{8n^3}$$

دفتر فنی ایلیا
۳۳۶۹۸۷۲۱

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year ۸۵ Month ۱ Date ۱۵

مثال: معادله‌ی موج زیر را با شرایط داده شده حل کنید:

$$u_{tt} - 9u_{xx} = xt$$

$$\begin{cases} u(x,0) = x \\ u_t(x,0) = 1 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

شرایط مرزی همگن

$L = 1$

چون مشتق ۲ سر تیر برابر صفر است حالت cos ای پدید می‌آید:

فرم جواب: $u(x,t) = G_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \cos(n\pi x)$

$$u_{tt} = \ddot{G}_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{G}_n(t) \cos(n\pi x)$$

$$u_{xx} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} -n^2\pi^2 G_n(t) \cos(n\pi x)$$

G_0 چون x ندارد مشتقش برابر با صفر است

مشتق گیری از x

حال فرم جواب را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$u_{tt} - 9u_{xx} = xt$$

$$\rightarrow \ddot{G}_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{G}_n(t) \cos(n\pi x) - 9\sum_{n=1}^{\infty} -n^2\pi^2 G_n(t) \cos(n\pi x) = xt$$

حال $\sum$ را فاکتور می‌گیریم:

ادامه‌ی حل:

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامه حل: رابطه ①

$$\ddot{G}_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ddot{G}_n(t) + 9n^2\pi^2 G_n(t)\right)\cos(n\pi x) = xt$$

سری فوریه کسینوسی

یادآوری:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

طبق یادآوری فوق:

$$\ddot{G}_0(t) = \frac{1}{1}\int_0^1 xt\,dx = \left[t\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{t}{2}$$

($\ddot{G}_0(t) \to \frac{1}{2}a_0$, $1 \to L$)

$$\xrightarrow{\int dt} \dot{G}_0(t) = \frac{t^2}{4} + a_0 \xrightarrow{\int dt} G_0(t) = \frac{t^3}{12} + a_0 t + b_0$$

به خاطر G_0

$$\ddot{G}_n(t) + 9n^2\pi^2 G_n(t) = \frac{2}{1}\int_0^1 xt\cos(n\pi x)\,dx$$

ضریب داخل سیگما رابطه ①

حال t را خارج می‌کنیم:

$$= t\underbrace{\,2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx\,}_{H_n} = tH_n$$

خطی مرتبه دوم

ادامه حل:

Subject:
Year. ۸۶ Month. ۱ Date. ۱۸

۵۲

ادامه حل: خطی مرتبه دوم: $\ddot{G}_n(t) + 9n^2\pi^2 G_n(t) = t H_n$

معادله مشخصه (کمکی) $\Rightarrow \lambda^2 + 9n^2\pi^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3n\pi i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 3n\pi \end{cases}$

$$G_n(t) = a_n \cos(3n\pi t) + b_n \sin(3n\pi t) + \frac{t H_n}{9n^2\pi^2} \quad \rightarrow G_n^*(t)$$

$$u(x,t) = G_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos(n\pi x)$$

جواب معادله:

$$u(x,t) = \frac{t^3}{12} + a_0 t + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(3n\pi t) + b_n\sin(3n\pi t) + \frac{t H_n}{9n^2\pi^2}\right)\cos(n\pi x)$$

حال a_0 و b_0 و a_n و b_n را از طریق حالتهای اولیه داده شده محاسبه میکنیم:

$$u(x,0) = x \Rightarrow b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n)\cos(n\pi x) = x \quad \text{سری فوریه کسینوسی}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx \\ b_0 = \frac{1}{(1)}\int_0^{(1)} x\,dx \Rightarrow b_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

حال از جواب معادله یعنی $u(x,t)$ مشتق می‌گیریم:

$$u_t(x,t) = \frac{t^2}{4} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-3n\pi a_n\sin(3n\pi t) + 3n\pi b_n\cos(3n\pi t) + \frac{H_n}{9n^2\pi^2}\right)\cos(n\pi x)$$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامهٔ حل:

حال در $u(x,t)$ به جای t، صفر قرار می‌دهیم و داریم:

$u_t(x,0)=1$: طبق فرض مسئله $\stackrel{t=0}{\Longrightarrow} a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(3n\pi b_n+\frac{4n}{9n^2\pi^2}\right)\cos(n\pi x)=1$

سری فوریهٔ کسینوسی

* همانطور که در این مسئله هم دیده می‌شود، ۳ بار به سراغ فوریهٔ سینوسی یا کسینوسی می‌رویم.

$$\rightarrow\begin{cases} 3n\pi b_n+\frac{4n}{9n^2\pi^2}=\frac{2}{1}\int_0^1\cos(n\pi x)\,dx=0 \Rightarrow b_n=\frac{-4n}{27n^3\pi^3} \\ a_0=\frac{1}{1}\int_0^1 dx \Rightarrow a_0=1 \end{cases}$$

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

حل معادله موج متناهی با مرز ناهمگن:

در این حالت فرض می‌کنیم: $u(x,t) = V(x,t) + W(x,t)$

سپس با توجه به شرایط مرزی، $W(x,t)$ را به یکی از دو شکل زیر انتخاب می‌کنیم:

شرایط مرزی $\begin{cases} u(0,t) = P(t) \\ u(l,t) = q(t) \end{cases}$ یا $\begin{cases} u(0,t) = P(t) \\ u_x(l,t) = q(t) \end{cases}$

یا $\begin{cases} u_x(0,t) = P(t) \\ u(l,t) = q(t) \end{cases} \Rightarrow W(x,t) = ax + b$

شرایط مرزی به شکل دو مشتقی باشد ← $\begin{cases} u_x(0,t) = P(t) \\ u_x(l,t) = q(t) \end{cases} \Rightarrow W(x,t) = ax^2 + bx$

سپس یک معادله موج جدید برحسب V در نظر می‌گیریم و مرز آن را همگن فرض می‌کنیم. سپس با توجه به شرایط مرزی همگن، مجهولات a و b را به دست می‌آوریم و در آخر معادله موج جدید برحسب V را تحلیل می‌کنیم و آن را حل می‌نماییم.

PAPCO

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

مثال:

$$u_{tt} - 4u_{xx} = x^2 - 2t$$

شرایط معادله:
$$\begin{cases} u(x,0) = x+1 \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 1-t \\ u(\pi,t) = 2t+1 \end{cases}$$
شرایط مرزی ناهمگن

اولین کار در حل این چنین مسائلی این است که یک معادله مانند معادله داده شده برحسب v بنویسیم (یعنی هر جا u بود به جایش v قرار دهیم) (یعنی برحسب v نوشته‌ایم)

$$v_{tt} - 4v_{xx} = ? = x^2 - 2t$$

شرایط معادله:
$$\begin{cases} v(x,0) = ? = x \\ v_t(x,0) = ? = 1 - \frac{3}{\pi}x \\ v(0,t) = 0 \\ v(\pi,t) = 0 \end{cases}$$
شرایط مرزی همگن (شرایط این‌گونه‌اند ما)

طبق قرارداد: $u(x,t) = v(x,t) + \overbrace{ax+b}^{w(x,t)}$ رابطه ①

حال مسئله ما، محاسبه a و b است که با توجه به شرایط مرزی ناهمگن مسئله نوشته:

در رابطه ①: $\xrightarrow{x=0} \overbrace{u(0,t)}^{1-t} = \overbrace{v(0,t)}^{0} + b \rightarrow b = 1-t$

در رابطه ①: $\xrightarrow{x=\pi} u(\pi,t) = v(\pi,t) + a\pi + 1 - t \rightarrow a = \frac{3t}{\pi}$

ادامه حل ←

Subject:
Year ۸۵ Month ۱ Date ۲۲

ادامه حل: رابطه ۱: $u(x,t) = v(x,t) + ax + b$

حال a و b بدست آمده را در رابطه ۱ جایگذاری می‌کنیم:

رابطه $\circledast$: $u(x,t) = v(x,t) + \frac{3t}{\pi}x + 1 - t$

* حال فقط تمام بحث‌ها روی رابطه $\circledast$ می‌باشد و در این حالت و با استفاده از رابطه $\circledast$ می‌توان جای علامت سؤال ۴ را پیدا نمود:

* علامت سؤال دوم: در رابطه $\circledast$ $\xrightarrow{t=0}$ $\overbrace{u(x,0)}^{x+1} = v(x,0) + 1 \rightarrow v(x,0) = x$

در رابطه $\circledast$ $\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } t}$ $u_t(x,t) = v_t(x,t) + \frac{3}{\pi}x - 1 \xrightarrow{t=0}$

* علامت سؤال سوم: $\xrightarrow{t=0}$ $u_t(x,0) = v_t(x,0) + \frac{3}{\pi}x - 1 \Rightarrow v_t(x,0) = 1 - \frac{3}{\pi}x$

در رابطه $\circledast$ $\xrightarrow{\text{۲ بار مشتق نسبت به } t}$ $u_{tt} = v_{tt}$

در رابطه $\circledast$ $\xrightarrow{\text{۲ بار مشتق نسبت به } x}$ $u_{xx} = v_{xx}$

حال به جای مقادیر و عبارات فوق در معادله اصلی داده شده جایگذاری انجام میدهیم:

* علامت سؤال اول: $u_{tt} - 4u_{xx} = x^2 - 2t \rightarrow v_{tt} - 4v_{xx} = x^2 - 2t$

حال مانند حل مسئله ۵ی جلسه قبل، ابتدا $v(x,t)$ را از رابطه صفحه ۵ی بعد می‌بینیم

Subject:
Year ۸۵ Month ۱ Date ۲۲

می‌آوریم و در آخر با جاگذاری $V(x,t)$ بدست آمده در رابطهٔ (*) مقدار عبارت

$u(x,t)$ بدست می‌آید:

فرم جواب: $V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin(nx)$

* تذکر مهم:

برای مشتق‌گیری از جواب خصوصی به شکل زیر عمل می‌کنیم:

$G_n^* \xrightarrow{\text{مشتق}} \dot{G}_n^* \longrightarrow$ اگر $t=0 \longrightarrow \dot{G}_n^*(0)$

PAPCO

Subject.
Year ۸۵ Month. ۱ Date. ۲۲/۱

۵۸

مثال: $u_{tt} - 9u_{xx} = xt$

شرایط معادله
$$\begin{cases} u(x,0) = \sin x \\ u_t(x,0) = 1 \\ u_x(0,t) = 2t+3 \\ u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$
$u_x(0,t)$ و $u_x(1,t)$ ← شرایط مرزی ناهمگن

حال ماهیت مسئله قبل شروع به حل می کنیم:

$v_{tt} - 9v_{xx} = ?\ xt - 18t - 27$

شرایط معادله جدید
$$\begin{cases} v(x,0) = ?\ \sin x + \frac{3}{2}x^2 - 3x \\ v_t(x,0) = ?\ 1 + x^2 - 2x \\ v_x(0,t) = 0 \\ v_x(1,t) = 0 \end{cases}$$
← شرایط مرزی همگن

$L = 1$

$w(x,t)$ ← چون ۲ بار مشتق گرفته ام

رابطه ۱: $u(x,t) = v(x,t) + ax^2 + bx$ نقش ترکیب داره شده

با توجه به شرایط مرزی ناهمگن داریم:

در رابطه ۱ $\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x}$ $u_x(x,t) = v_x(x,t) + 2xa + b \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 0 \longrightarrow u_x(0,t) = v_x(0,t) + b \rightarrow b = 2t+3 \\ x = 1 \longrightarrow u_x(1,t) = v_x(1+t) + 2a + 2t + 3 \rightarrow a = \dfrac{-2t-3}{2} \end{cases}$$

ادامه حل ←

PAPCO

Subject:
Year ۸۵ Month. ۱ Date. ۲۲(۱)

ادامه حل:

حال مقادیر a و b را در رابطه ① قرار می‌دهیم:

رابطه (*): $u(x,t) = v(x,t) + \frac{-2t-3}{2}x^2 + (2t+3)x$

حال با توجه به رابطه * و مرز ناهمگن، علامت سؤال ۴ را پیدا می‌کنیم:

علامت سؤال ۲: $v(x,0) = \sin x + \frac{3}{2}x^2 - 3x$ ← $u(x,0) = v(x,0) - \frac{3}{2}x^2 + 3x$ ←(t=0) در رابطه ۱

در رابطه ۱ ←(مشتق نسبت به t) $u_t(x,t) = v_t(x,0) - x^2 + 2x$ ←(t=0) $u_t(x,0) = v_t(x,0) - x^2 + 2x$ (که $u_t(x,0) = 1$)

$\rightarrow v_t(x,0) = 1 + x^2 - 2x$ * علامت سؤال ۴

در رابطه * ←(۲ بار مشتق نسبت به t) $u_{tt} = v_{tt}$

در رابطه ۱ ←(۲ بار مشتق نسبت به x) $u_{xx} = v_{xx} - 2t - 3$

حال به جای u معادله اصلی، v و ۴ را قرار می‌دهیم:

$u_{tt} - 9u_{xx} = xt \rightarrow v_{tt} - 9(v_{xx} - 2t - 3) = xt$

$\rightarrow v_{tt} - 9v_{xx} = xt - 18t - 27$ * علامت سؤال اول

فرم جواب: $v(x,t) = G_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos(n\pi x)$

و با یافتن $v(x,t)$ از فرم جواب بالا و قرار دادن در رابطه ⊛، $u(x,t)$ به دست می‌آید.

PAPCO

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

معادله گرما (حرارت) :

فرم کلی معادله گرما : $u_t - c^2 u_{xx} = F(x,t)$

* تفاوت معادله گرما با معادله موج فقط در u_t است که در معادله موج u_{tt} داریم.

دفتر فنی ایلیا
۳۳۶۹۸۷۲۱

حل معادله گرمای متناهی :

میله‌ای به طول L را عایق پوش می‌کنیم به طوری که فقط از دو سر خود بتواند با محیط اطراف تبادل گرما نماید. این میله را بر روی محور x در محدوده $0 < x < L$ قرار می‌دهیم. در این صورت $u(x,t)$ (جواب معادله گرما)، درجه حرارت نقطه‌ی x از میله نسبت به زمان را نشان می‌دهد.

معادله توزیع گرما در میله‌ی متناهی حل نخواهد شد مگر اینکه شرایط زیر برای معادله داده شده باشد :

شرایط معادله گرما
$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) & \text{شرط اولیه ← گرمای اولیه میله} \\ u(0,t) = p(t) \\ u(L,t) = q(t) \end{cases}$$

$u(0,t) = p(t)$ و $u(L,t) = q(t)$ ← گرما در دو سر میله } شرایط مرزی

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

خازن بسیار بسیار کم:

حل معادلهٔ ترما همانند معادلهٔ موج متناهی است، زیرا:

شرایط مرزی یکسانی در هر دو معادلهٔ فوق صادق است.

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۲۲

مثال: $u_t - 4u_{xx} = x - t$

شرایط معادله
$$\begin{cases} u(x,0) = x \\ u_x(0,t) = t \\ u(\pi,t) = 1-t \end{cases}$$
شرایط مرزی ناهمگن

$$V_t - 4V_{xx} = ? = 1 + \pi - t$$

شرایط معادله جدید
$$\begin{cases} V(x,0) = ? = x - 1 \\ V_x(0,t) = 0 \\ V(\pi,t) = 0 \end{cases}$$
شرایط مرزی همگن

حدس تغییر: $u(x,t) = V(x,t) + \overbrace{ax+b}^{w(x,t)}$ رابطهٔ ①

با توجه به شرایط مرزی ناهمگن و رابطهٔ ①
$$\begin{cases} u_x(x,t) = V_x(x,t) + a \xrightarrow{x=0} \overbrace{u_x(0,t)}^{t} = \overbrace{V_x(0,t)}^{0} + a \to a = t \\ \overbrace{u(\pi,t)}^{1-t} = \overbrace{V(\pi,t)}^{0} + t\pi + b \to b = 1 - t - t\pi \end{cases}$$

a و b را در رابطهٔ ① قرار می‌دهیم:

$u(x,t) = V(x,t) + tx + 1 - t - t\pi$ رابطهٔ ⊛

حال علامت سؤال‌های ایجاد شده را توسط رابطهٔ ⊛ بدست می‌آوریم.

علامت سؤال دوم: در رابطهٔ ⊛ $\xrightarrow{t=0} \overbrace{u(x,0)}^{x} = V(x,0) + 1 \to V(x,0) = x - 1$

در رابطهٔ ⊛ $\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} u_t = V_t + x - 1 - \pi$

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامهٔ حل:

(b) معادله $\xrightarrow{\text{۲ بار مشتق نسبت به } x}$ $u_{xx} = v_{xx}$

حال به جای u در معادلهٔ اصلی جایگذاری v را انجام می‌دهیم:

$u_t - 4u_{xx} = x - t \rightarrow v_t + x - 1 - \pi - 4v_{xx} = x - t$

$\rightarrow v_t - 4v_{xx} = 1 + \pi - t$ * معادلهٔ سؤال اول

فرم جواب به صورت: $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos(\lambda_n x) \rightarrow \lambda_n = \frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{L}$

$L = \pi \rightarrow \lambda_n = \frac{2n-1}{2}$

حال فرم جواب را در معادله صدق می‌دهیم:

$v_t = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{G}_n(t)\cos(\lambda_n x)$

$v_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_n^2 G_n(t)\cos(\lambda_n x)$

$v_t - 4v_{xx} = 1 + \pi - t \xrightarrow{\text{جایگذاری بالا}} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{G}_n(t)\cos(\lambda_n x) -$

$4\sum_{n=1}^{\infty} -\lambda_n^2 G_n(t)\cos(\lambda_n x) = 1 + \pi - t$

$\xrightarrow{\text{۱ و ۲ ناشی از}} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\dot{G}_n(t) + 4\lambda_n^2 G_n(t)\right)\cos(\lambda_n x) = 1 + \pi - t$ سری فوریه کسینوسی

PAPCO ادامهٔ حل ←

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامه حل: $\to \dot{G}_n(t) + 4\lambda_n^2 G_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1+x-t)\cos(\lambda_n x)\,dx$

چون $G_n(t)$ برحسب t می‌باشد، t را از داخل انتگرال بیرون می‌کشیم:

$$\to = \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1+x)\cos(\lambda_n x)\,dx}_{H_n} - t\,\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\lambda_n x)\,dx}_{K_n}$$

* تنها فرق معادله موج با معادله گرما این است که در معادله موج $\ddot{G}$ ظاهر می‌شود ولی در معادله گرما $\dot{G}$ ظاهر می‌شود.

* معادله مرتبه اول: $\dot{G}_n(t) + 4\lambda_n^2 G_n(t) = H_n - tK_n$

یادآوری: معادله مرتبه اول $y' + f(t)y = r(t)$

$$y = e^{-\int f(t)dt}\left[\int e^{\int f(t)dt}\, r(t)\,dt + c\right]$$

طبق یادآوری بالا داریم:

$$G_n(t) = e^{-\int 4\lambda_n^2 dt}\left[\int e^{\int 4\lambda_n^2 dt}(H_n - tK_n)\,dt + a_n\right]$$

$$G_n(t) = e^{-4\lambda_n^2 t}\left[\int e^{4\lambda_n^2 t}(H_n - tK_n)\,dt + a_n\right]$$

چون انتگرال بالا، نامعین است (کران ندارد) و هم برحسب t و هم برحسب n می‌باشد

الزاماً باید حل شود و نمی‌توان به جای آن اعداد قرار داد.

PAPCO ← ادامه حل

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۲۲

ادامه حل :

مشتق	انتگرال
$H_n - tK_n$ (+)	$e^{4\lambda_n^2 t}$
$-K_n$ (−)	$\frac{1}{4\lambda_n^2} e^{4\lambda_n^2 t}$
0	$\frac{1}{16\lambda_n^4} e^{4\lambda_n^2 t}$

$$G_n(t) = e^{-4\lambda_n^2 t}\left[\frac{H_n - tK_n}{4\lambda_n^2} e^{4\lambda_n^2 t} + \frac{K_n}{16\lambda_n^4} e^{4\lambda_n^2 t} + a_n\right]$$

$$G_n(t) = \frac{H_n - tK_n}{4\lambda_n^2} + \frac{K_n}{16\lambda_n^4} + a_n e^{-4\lambda_n^2 t}$$

حال $G_n(t)$ را در فرم جواب قرار می‌دهیم :

فرم جواب : $V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\cos(\lambda_n x)$

جایگذاری $G_n(t)$ → جواب نهایی

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n - tK_n}{4\lambda_n^2} + \frac{K_n}{16\lambda_n^4} + a_n\right)\cos(\lambda_n x)$$

فقط در جواب بالا یک مجهول (a_n) داریم و با استفاده از شرایط اولیه می‌توان آن را یافت

شرایط اولیه $V(x,0) = x - 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n - tK_n}{4\lambda_n^2} + \frac{K_n}{16\lambda_n^4} + a_n\right)\cos(\lambda_n x) =$

$= x - 1$ سری فوریه کسینوسی :

PAPCO ← ادامه حل

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year ۸۵ Month. ۱ Date ۲۲

ادامه حل:

$$\frac{H_n}{4\lambda_n^2} + \frac{K_n}{16\lambda_n^4} + a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-1)\cos(\lambda_n x)\,dx$$

$\frac{2}{\pi} \to \frac{2}{L}$ ، انتگرال $= P_n$

$$a_n = P_n - \frac{H_n}{4\lambda_n^2} - \frac{K_n}{16\lambda_n^4}$$

حال با جایگذاری a_n در ۲ و سپس جایگذاری ۲ جواب ۱ که در رابطه ۲۱ (*) به دست آمده

$u(x,t)$ (جواب معادله گرما) به دست می آید.

دفتر فنی ایلیا ۳۳۶۹۸۷۲۱ ۴۵ متری ۵۵ حقی پاساژ ... دانشجو

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۲۹

معادله‌ی پواسون:

معادله‌ی پواسون به فرم $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$ می‌باشد که در حالت دو بعدی به صورت $\nabla^2 u = f$ (نابلا دو یا دلتای لاپلاسین) است. زیرا:

در حالت دو بعدی: $\vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$

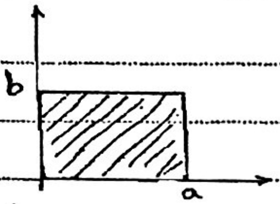
$$\nabla^2 u = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u$$

$$\nabla^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

هرگاه در معادله‌ی $u_{xx}+u_{yy}=f(x,y)$ مقدار $f(x,y)=0$ شود، آنگاه معادله‌ی پواسون را معادله‌ی لاپلاس می‌گوییم.

* در امتحان مسئله‌ی داده شده بیشتر معادله‌ی پواسون است تا معادله‌ی موج.

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی



حل معادله پتانسیل روی صفحه مستطیلی:

در معادله پتانسیل برروی صفحه مستطیلی، توزیع بار الکتریکی روی چهار مرز (چهار ضلع مستطیل) را تعیین نموده و سپس میتوان توزیع بار را در هر جای مستطیل بدست آورد.

* حل معادله پتانسیل روی صفحه مستطیلی تعمیم یافته حل معادله موج است.

معادله پتانسیل روی صفحه مستطیلی حل نمی‌شود مگر پتانسیل روی چهار مرز (چهار ضلع) داده شده باشد:

شرایط معادله پتانسیل دو بعدی روی صفحه مستطیلی:

$$\begin{cases} u(x,0)=f_1(x) \\ u(x,b)=g_1(x) \end{cases} \quad \text{زوج ①}$$

$$\begin{cases} u(0,y)=f_2(y) \\ u(a,y)=g_2(y) \end{cases} \quad \text{زوج ②}$$

⟸ همه‌ی شرایط مرزی اند و دو زوج را تشکیل میدهند

برای حل مسئله فوق یکی از دو زوج ① یا ② را به دلخواه مرزی فرض میکنیم و زوج دیگر را اولیه فرض میکنیم و مسئله پتانسیل را همانند موج حل میکنیم.

اولویت اول: بهتر است زوجی را مرزی فرض کنیم که همگن باشد.

اولویت دوم: اگر دو زوج ناهمگن بودند، زوجی را که دارای فرم جواب sin است را مرزی در نظر بگیریم.

نکته مهم:

الف: چنانچه زوج ۲ را به عنوان شرایط مرزی انتخاب نمائیم، آنگاه W.o.b تابعی برحسب x و تابع مجهول G_n در فرم جواب، برحسب y خواهد شد.

ب: چنانچه زوج ۱ را به عنوان شرایط مرزی انتخاب نمائیم، آنگاه W.o.b تابعی برحسب y و تابع مجهول G_n در فرم جواب، برحسب x خواهد شد.

Subject:
Year ۸۵ Month. ۱ Date. ۲۹

مثال:

$$u_{xx} + u_{yy} = x - y$$

* چون فرم جواب سینوسی می‌شود لذا داریم ← شرایط مرزی

$$\begin{cases} u(x,0) = x+1 \\ u(x,\pi) = 2-x \end{cases}$$

شرایط اولیه

$$\begin{cases} u_x(0,y) = y-2 \\ u_x(\pi,y) = 1-y^2 \end{cases}$$

نکات مهم:

۱ـ در امتحان معمولاً یک ؟ را همگن می‌دهند.

۲ـ در امتحان ممکن است زوج ۴ را پس و پیش بدهند و باید برحسب x ۴ را زوج ① و برحسب y ۴ را زوج ② قرار دهیم.

$$v_{xx} + v_{yy} = ?\ x - y$$

شرایط مرزی همگن

$$t = \pi \leftarrow \begin{cases} v(x,0) = 0 \\ v(x,\pi) = 0 \\ v_x(0,y) = ?\ y + \frac{2}{\pi}y - 3 \\ v_x(\pi,y) = ?\ \frac{2}{\pi}y - y^2 \end{cases}$$

$$u(x,y) = v(x,y) + \overbrace{ay+b}^{w(x,t)}$$

با توجه به شرایط مرزی ناهمگن می‌توان نوشت که برای y

$$y=0 \rightarrow u(x,0) = v(x,0) + b \Rightarrow b = x+1$$

$$y=\pi \rightarrow u(x,\pi) = v(x,\pi) + a\pi + x + 1 \Rightarrow a = \frac{1-2x}{\pi}$$

b, a جایگذاری مقادیر →

$$u(x,y) = v(x,y) + \frac{1-2x}{\pi}y + x + 1$$ (*) رابطه ۱

ادامه در صفحه بعد ←

PAPCO

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۲۹

ادامهٔ حل:

* در رابطهٔ ۱ $\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x}$ $u_x(x,y) = v_x(x,y) - \frac{2}{\pi}y + 1$

$\xrightarrow{x=0}$ $u_x(0,y) = v_x(0,y) - \frac{2}{\pi}y + 1 \Rightarrow v_x(0,y) = y + \frac{2}{\pi}y - 3$ (با $u_x(0,y) = y-2$) علامت سؤال دوم

$\xrightarrow{x=\pi}$ $u_x(\pi,y) = v_x(\pi,y) - \frac{2}{\pi}y + 1 \Rightarrow v_x(\pi,y) = \frac{2}{\pi}y - y^2$ (با $u_x(\pi,y) = 1-y^2$) علامت سؤال سوم

* در رابطهٔ ۱ $\xrightarrow{\text{۲ بار مشتق نسبت به } x}$ $u_{xx} = v_{xx}$

جایگذاری در معادلهٔ اصلی مسئله

* در رابطهٔ ۱ $\xrightarrow{\text{۲ بار مشتق نسبت به } y}$ $u_{yy} = v_{yy}$

$\longrightarrow u_{xx} + u_{yy} = x - y \longrightarrow v_{xx} + v_{yy} = x - y$ علامت سؤال اول

فرم جواب: $v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x) \sin(ny)$

در فرم جواب هر کدام که x بود، دیگری y می‌شود یعنی ۲ متغیر داریم

$v_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} G_n''(x) \sin(ny)$

$v_{yy} = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 G_n(x) \sin(ny)$

$v_{xx} + v_{yy} = x - y \xrightarrow{\text{جایگذاری فرم‌های بالا}} \sum_{n=1}^{\infty} G_n''(x)\sin(ny) + \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 G_n(x)\sin(ny)$

$= x - y$

PAPCO ادامهٔ حل ⇐

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامه حل: سری فوریه سینوسی: $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(G_n''(x) - n^2 G_n(x)\right)\sin(ny) = x-y$

$$\Rightarrow G_n''(x) - n^2 G_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-y)\sin(ny)\,dy$$

برحسب عبارت و متغیر داخل مثلثاتی است

$$= x\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(ny)\,dy}_{H_n} - \underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}y\sin(ny)\,dy}_{K_n}$$

* چون x برحسب y است درنتیجه x را از داخل انتگرال بیرون می‌آوریم *

$$G_n''(x) - n^2 G_n(x) = xH_n - K_n$$

* در پتانسیل همواره هیپربولیک ظاهر می‌شود: درنتیجه: معادله مشخصه: $\lambda^2 - n^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm n$

$$G_n(x) = a_n\cosh(nx) + b_n\sinh(nx) - \frac{xH_n - K_n}{n^2}$$ رابطه ۲

رابطه ۱: فرم جواب: $V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(x)\sin(ny)$

جاگذاری رابطه ۲ در ۱:

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cosh(nx) + b_n\sinh(nx) - \frac{xH_n - K_n}{n^2}\right)\sin(ny)$$

ادامه حل ←

Subject.
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۲۹

ادامهٔ حل:

حال از شرایط اولیه تابع V (تابع همگن) استفاده می‌کنیم:

$$V_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n\sinh(nx)+nb_n\cosh(nx)-\frac{H_n}{n^2}\right)\sin(ny)$$

سری فوریه سینوسی:

$$\xrightarrow{n=0} V_n(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(nb_n-\frac{H_n}{n^2}\right)\sin(ny)=y+\frac{2}{\pi}y-3$$

$y+\frac{2}{\pi}y-3$

$$\rightarrow nb_n-\frac{H_n}{n^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(y+\frac{2}{\pi}y-3\right)\sin(ny)\,dy \Rightarrow b_n=\frac{P_n+\frac{H_n}{n^2}}{n}$$

(the integral $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(y+\frac{2}{\pi}y-3\right)\sin(ny)\,dy$ is marked P_n)

سری فوریه سینوسی:

$$\xrightarrow[\text{شرایط اولیه}]{x=\pi} V_n(\pi,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(na_n\sinh(n\pi)+nb_n\cosh(n\pi)-\frac{H_n}{n^2}\right)=\frac{2}{\pi}y-y^2$$

$$\rightarrow na_n\sinh(n\pi)+nb_n\cosh(n\pi)-\frac{H_n}{n^2}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{2}{\pi}y-y^2\right)\sin(ny)\,dy$$

(the integral is marked Z_n)

$$\rightarrow a_n=\frac{Z_n+\frac{H_n}{n^2}-\left(P_n+\frac{H_n}{n^2}\right)\cosh(n\pi)}{n\sinh(n\pi)}$$

P4PCO

Subject.
Year ۸۵ Month. ۱ Date. ۲۹

مراحل حل معادلات موج - گرما - پتانسیل متناهی:

۱- همگن کردن شرایط مرزی

۲- اثبات فرم جواب ٤ ← یافتن $F(x)$

۳- جایگذاری فرم جواب در معادله و محاسبه تابع مجهول G_n ← یافتن $G_n(t)$

تذکر:
چنانچه حل مسئله جاجز نتایج کامل خواسته شده باشد، انجام مرحله دوم الزامیست. در غیر اینصورت نیازی به انجام این قسمت (قسمت دوم) نمی باشد.

مرحله دوم:

در این مرحله، ابتدا معادله موج را همگن فرض می نمائیم و سپس شرایط مرزی را که در مرحله اول همگن شده است انتخاب می نمائیم و به روش تکنیک متغیرها (روش ضرب) معادله را حل می نمائیم. در این روش جواب معادله را به فرم $u(x,t) = F(x) G(t)$ در نظر می گیریم و با صدق دادن ۲٫۵ در معادله همگن و شرایط مرزی همگن تابع مجهول $F(x)$ را به دست می آوریم.

PAPCO

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

مثال:

مسئله‌ی زیر را با جزییات کامل حل کنید: $u_{tt} - 4u_{xx} = x + t^2$

$$\begin{cases} u(x,0) = \sin(2x) \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

$u(0,t)=0$, $u(\pi,t)=0$ ← شرایط مرزی همگن

مرحله‌ی اول:

مرز همگن است.

مرحله‌ی دوم: رابطه‌ی ① معادله‌ی موج همگن $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$

شرایط مرزی همگن
$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

دفتر فنی ایلیا ۳۳۶۹۸۷۲۱

تذکر مهم:

در این قسمت (مرحله‌ی دوم) اصلاً به معادله‌ی موج اولیه کاری نداریم و فقط با معادله‌ی موج همگن شده سروکار داریم.

روش تفکیک متغیرها: $u(x,t) = F(x)\,G(t)$ رابطه‌ی ②

از رابطه‌ی ②
$$\begin{cases} u_{tt} = F(x)\,\ddot{G}(t) \\ u_{xx} = F''(x)\,G(t) \end{cases}$$
جایگذاری در رابطه‌ی ① ← $F(x)\,\ddot{G}(t) = 4F''(x)\,G(t)$

$$\rightarrow \frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{\ddot{G}(t)}{4G(t)} = K$$

ضرب ۴ را با $G(t)$ می‌نویسیم

ادامه‌ی حل ←

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۱. Date. ۲۹

تذکر:

در امتحان معمولاً سؤال سوم یا دوم مسئله را با جزئیات کامل حل نمائید.

تذکر بسیار مهم:

فرم جواب معادلات موج و گرما و پتانسیل همه: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\, F_n(x)$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامهٔ حل ← $\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{\ddot{G}(t)}{4G(t)} = K$

معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم : رابطهٔ ۳ : $F''(x) - KF(x) = 0$

طرفین وسطین ⇒

$$\begin{cases} F''(x) - KF(x) = 0 \\ \ddot{G}(t) - 4KG(t) = 0 \end{cases}$$

(the second equation is crossed out) ← $G(t)$ در مرحلهٔ بعد جداگانه بدست می‌آید

دو ثابت c_1 و c_2 داریم و باید دو شرط داشته باشیم تا c_1 و c_2 بدست آید و از شرایط مرزی معادلهٔ موج همگن استفاده می‌کنیم.

شرایط مرزی:

شرط مرزی: $u(0,t) = 0 \Rightarrow F(0)\,G(t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0$ ، $G(t) \neq 0$

زیرا با توجه به $u(x,t) = F(x)G(t)$ اگر $G(t) = 0$ باشد آنگاه $u(x,t)$ به ازای هر t ای صفر می‌شود یعنی ارتعاشی بوجود نمی‌آید.

شرط مرزی: $u(\pi,t) = 0 \Rightarrow F(\pi)\,G(t) = 0 \Rightarrow F(\pi) = 0$ ، $G(t) \neq 0$

دفتر فنی ایلیا
۳۳۶۹۸۷۲۱
مرکز دو حقی پاسخ دانشجو ...

$$\Rightarrow \begin{cases} F''(x) - KF(x) = 0 & \text{رابطهٔ ۳} \\ F(0) = F(\pi) = 0 & \text{رابطهٔ ۴} \end{cases}$$

$\Rightarrow F''(x) - KF(x) = 0 \Rightarrow$ جواب معادلهٔ دیفرانسیل : $\lambda^2 - K = 0$

(i) $K = 0$ جایگذاری در ۳ → $F''(x) = 0$ → برای یافتن $F(x)$ دوبار انتگرال می‌گیریم → $F'(x) = c_1 \Rightarrow F(x) = c_1x + c_2$

$F(x) = c_1x + c_2 \Rightarrow$

- طبق رابطهٔ ۴ ← $F(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \rightarrow F(x) = c_1x$
- طبق رابطهٔ ۴ ← $F(\pi) = 0 \rightarrow c_1\pi = 0 \rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow F(x) = 0$ ($\pi = 3.14$)

$\Rightarrow u = 0$ ✗

PAPCO — ادامهٔ مطلب

← تناقض یعنی $K=0$ نمی‌باشد. اگر $K=0$ باشد ارتعاشی نداریم.

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۲۹

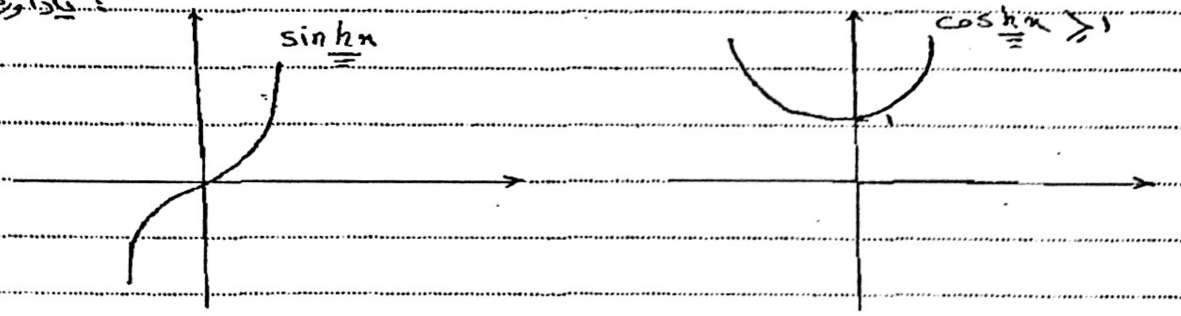
ادامهٔ حل:

(ii): $K = \mu^2 > 0$, $\mu > 0$

$\xrightarrow[\text{در رابطهٔ ③}]{K=\mu^2 \text{ جایگذاری}} F''(x) - \mu^2 F(x) = 0 \xrightarrow{\text{معادلهٔ مشخصه}} \lambda^2 - \mu^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\mu$ تولید شد ترمینها

جواب عمومی معادله: $F(x) = C_1 \cosh(\mu x) + C_2 \sinh(\mu x)$

یادآوری:



$F(0) = 0$: جایگذاری در رابطهٔ ④ $\Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow F(x) = C_2 \sinh(\mu x)$

$F(\pi) = 0$: جایگذاری در رابطهٔ ④ $\Rightarrow C_2 \sinh(\mu x) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow F(x) = 0$ ($C_2 = 0$)

$\neq 0$ زیرا $\sinh$ فقط در نقطهٔ صفر، صفر میشود

جایگذاری $F(x)$ در $x=\pi$ بالا — $\neq 0$ چون $\mu > 0$

$\Rightarrow u = 0$ ✗ تناقض

(iii): $K = -\mu^2 < 0$, $\mu > 0$

$\xrightarrow[\text{در رابطهٔ ③}]{K=-\mu^2 \text{ جایگذاری}} F''(x) + \mu^2 F(x) = 0 \xrightarrow{\text{معادلهٔ مشخصه}} \lambda^2 + \mu^2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \pm \mu i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \mu \end{cases}$

PAPCO

ادامهٔ حل ←

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

جواب عمومی معادله: $F(x) = C_1\cos(\mu x) + C_2\sin(\mu x)$

$F(0)=0$: رابطه ③ $\rightarrow C_1=0 \rightarrow F(x)=C_2\sin(\mu x)$

$F(\pi)=0$: رابطه ④ (جایگذاری π در $F(x)$ بالا) $\rightarrow C_2\sin(\mu\pi)=0$ $\xrightarrow{\text{با فرض } C_2=1}$ $\sin(\mu\pi)=0$

$\rightarrow \mu\pi = n\pi \rightarrow \mu_n = n \quad n=1,2,\dots$

$F_n(x)=\sin(nx)$ (یا $\frac{n\pi}{L}x$) توابع ویژه $n=1,2,\dots$

$K_n = -\mu_n^2 = -n^2$ مقادیر ویژه

فرم جواب معادلات موج و گرما و لاپلاس مشابه $\rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\,F_n(x)$

$\rightarrow u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} G_n(t)\sin(nx)$

مرحله سوم:

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۲۹

۸

مثال : مسئله زیر را با جزئیات کامل حل کنید: $u_{tt}-9u_{xx}=xt$

$$\begin{cases} u(x,0)=x \\ u_t(x,0)=1 \\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=0 \end{cases}$$ شرایط مرزی همگن

مرحله اول :
مرز همگن است

مرحله دوم : رابطه ① : معادله همگن $u_{tt}-9u_{xx}=0$

شرایط مرزی همگن $\begin{cases} u_x(0,t)=0 \\ u_x(1,t)=0 \end{cases}$

روش ضربی $u(x,t)=F(x)G(t)$ رابطه ②

با استفاده از رابطه ② $\begin{cases} u_{tt}=F(x)\ddot{G}(t) \\ u_{xx}=F''(x)G(t) \end{cases}$ جاگذاری در رابطه ① $\rightarrow F(x)\ddot{G}(t)=9F''(x)G(t)$

$$\rightarrow \frac{F''(x)}{F(x)}=\frac{\ddot{G}(t)}{9G(t)}=K \Rightarrow \begin{cases} F''(x)-KF(x)=0 \quad \text{رابطه ③} \\ \sout{\ddot{G}(t)-9KG(t)=0} \end{cases}$$

PAPCO ادامه حل ←

Subject:
Year: ۸۵ Month: ۱ Date: ۲۹

ادامهٔ حل:

حال، از شرایط مرزی معادلهٔ همگن استفاده می‌کنیم:

شرایط مرزی:

$$u_x(x,t)=F'(x)G(t) \xrightarrow{x=0} u_x(0,t)=F'(0)\underbrace{G(t)}_{\neq 0} \Rightarrow F'(0)=0$$

$$\xrightarrow{x=1} u_x(1,t)=0 \Rightarrow F'(1)\underbrace{G(t)}_{\neq 0} \Rightarrow F'(1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F''(x)-KF(x)=0 & \text{③ رابطهٔ} \\ F'(0)=F'(1)=0 & \text{④ رابطهٔ} \end{cases}$$

(i): $K=0 \xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطهٔ ③}} F''(x)=0 \to F'(x)=c_1 \to F(x)=c_1x+c_2$

$$\begin{cases} F'(0)=0 : \text{طبق رابطهٔ ④} \Rightarrow c_1=0 \\ F'(1)=0 : \text{طبق رابطهٔ ④} \Rightarrow c_1=0 \end{cases} \Rightarrow F(x)=c_2 \xrightarrow[\text{با فرض}]{c_2=1} F(x)=1$$

(ii): $K=\mu^2>0 \ , \ \mu>0$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری } K=\mu^2 \text{ در رابطهٔ ③}} F''(x)-\mu^2F(x)=0 \Rightarrow \lambda^2-\mu^2=0$ معادلهٔ مشخصه

$\Rightarrow \lambda=\pm\mu$ دو ریشهٔ قرینه

$$F(x)=c_1\cosh(\mu x)+c_2\sinh(\mu x)$$

$$F'(x)=c_1\mu\sinh(\mu x)+c_2\mu\cosh(\mu x)$$

PAPCO ← ادامهٔ حل

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۲۹ ۱

ادامه حل: $F'(x) = C_1 \mu \sinh(\mu x) + C_2 \mu \cosh(\mu x)$

$F'(0) = 0$: طبق رابطه ۴ $\Rightarrow C_2 \mu = 0 \xrightarrow{\mu>0} C_2 = 0 \Rightarrow F'(x) = C_1 \mu \sinh(\mu x)$

$F'(1) = 0$: طبق رابطه ۴ $\Rightarrow C_1 \mu \underbrace{\sinh(\mu x)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow F(x) = 0$; $\Rightarrow u = 0$ ✗ ناصحیح

(iii): $K = -\mu^2 < 0$, $\mu < 0$

$K = -\mu^2 \xrightarrow[\text{در رابطه ۳}]{\text{جایگذاری}} F''(x) + \mu^2 F(x) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \mu^2 = 0$ معادله مشخصه

$\Rightarrow \lambda = \pm \mu i \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \mu \end{cases}$

جواب معادله دیفرانسیل عبارتست: $F(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x)$

$F'(x) = -C_1 \mu \sin(\mu x) + C_2 \mu \cos(\mu x)$

طبق رابطه ۴: $F'(0) = 0 \Rightarrow C_2 \mu = 0 \xrightarrow{\mu<0} C_2 = 0 \Rightarrow F'(x) = -C_1 \mu \sin(\mu x)$

طبق رابطه ۴: $F'(1) = 0 \xrightarrow{C_2=0} -C_1 \mu \sin(\mu) = 0$ ($x=1$) $\xrightarrow{\text{با فرض } C_1=1} \sin(\mu) = 0$

$\longrightarrow \mu_n = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$

$F_n(x) = \cos(n\pi x)$, $n = 1, 2, \ldots$

ادامه حل ←

PAPCO

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۲۹

ادامه حل:

از ادغام کردن جواب در حالت $K=0$ و جواب برای حالت $K<0$ کلیه توابع ویژه مسئله را می‌توان به فرم روبه‌رو نوشت:

$$F_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

فرم جواب: $u(x,t) = \sum G_n(t) F_n(x)$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(t) F_n(x)$$

$$\xrightarrow{n=0} u(x,t) = G_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \cos(n\pi x)$$

* تا صفحه ۴۴ کتاب درسی داده شده است.

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

«تبدیلات فوریه»:

تبدیل فوریه:

فرض کنیم $f(x)$ تابعی تکه‌ای پیوسته و مطلقاً انتگرال‌پذیر در بازه‌ی $-\infty < x < \infty$ باشد. در این صورت:

صورت مختلط انتگرال فوریه:

$$\begin{cases} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega \\ C(\omega) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \end{cases}$$

با جایگذاری $C(\omega)$ در رابطه‌ی $f(x)$ داریم:

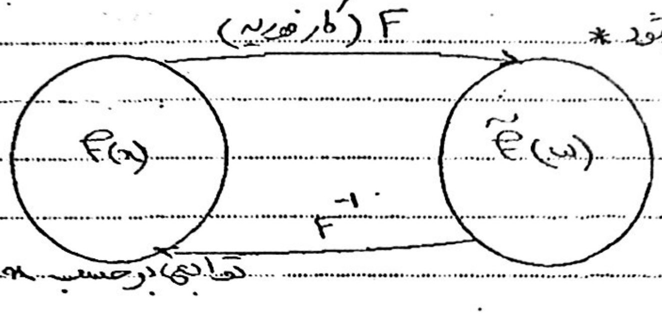
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \right) e^{i\omega x}\, d\omega$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\, dx \right) e^{i\omega x}\, d\omega$$

(تبدیل)

تبدیل فوریه‌ی $f(x)$: $F\{f(x)\} = \tilde{f}(\omega)$

* x به ω تبدیل می‌شود *



Subject.
Year. ۸۵ Month. ۲ Date. ۵ (۱)

هـ

تبدیل فوریه و معکوس آن برای توابع نامتناهی: $-\infty < x < \infty$

تبدیل فوریهٔ نامتناهی f: $F(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx = \tilde{f}(\omega)$

تبدیل فوریهٔ معکوس $\tilde{f}$: $F^{-1}(\tilde{f}(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega = f(x)$

قضیه:

اگر $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = 0$ همواره داریم:

$$F(f''(x)) = -\omega^2 F(f(x))$$

اثبات (سؤال مهم امتحانی):

طبق تعریف تبدیل فوریه

$$F(f''(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f''(x) e^{-i\omega x} dx$$

از روش جزء به جزء:
$$\begin{cases} u = e^{-i\omega x} \rightarrow du = -i\omega e^{-i\omega x} \\ dv = f''(x)dx \rightarrow v = f'(x) \end{cases}$$

← طبق تعریف و رابطهٔ جزء به جزء ←

(طبق شرط قضیه) 0

$du \rightarrow du = -i\omega e^{-i\omega x}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[f'(x) e^{-i\omega x} \right]_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx \right)$$

$$= \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx \rightarrow \begin{cases} u = e^{-i\omega x} \rightarrow du = -i\omega e^{-i\omega x} dx \\ dv = f'(x)dx \rightarrow v = f(x) \end{cases}$$

PAPCO

ادامه ←

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year ۸۵ Month ۲ Date ۵ ( )

ادامه

$$= \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[f(x)e^{-i\omega x}\right]_{-\infty}^{\infty} + i\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right)$$

(طبق شرط فرض) ۰

$$= i^2\omega^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx = -\omega^2 F(f(x))$$

($i^2 = -1$)

$F(f(x))$

* تذکر: تبدیل فوریه مشتق جزء امتحان نمی باشد.

((تبدیل فوریه و معکوس آن برای توابع نیم متناهی: $0 < x < \infty$

۱- تبدیل فوریه سینوسی:

فرض کنیم $f(x)$ تابعی یکدای پیوسته و مطلقاً انتگرال پذیر باشد (دو شرط داشتن انتگرال فوریه)

در بازه $0 < x < \infty$ باشد در این صورت:

$$\begin{cases} f(x) = \int_0^{\infty} b(\omega)\sin(\omega x)\,d\omega \\ b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx \end{cases}$$

دفتر فنی ایلیا ۳۳۶۹۸۷۲۱

جا جاگذاری $b(\omega)$ در رابطه $f(x)$ داریم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin(\omega x)\,dx\right)\sin(\omega x)\,d\omega$$

$$F_s(f(x)) = \tilde{f}_s(\omega)$$

نشانه sin است

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

* فوریه سینوسی:

$$F_s(f(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\sin(wx)\,dx = \tilde{f}_s(w)$$

$$F_s^{-1}(\tilde{f}_s(w)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{f}_s(w)\sin(wx)\,dw = f(x)$$

۲ـ تبدیل فوریه کسینوسی:

فوریه کسینوسی f:

$$F_c(f(x)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\cos(wx)\,dx = \tilde{f}_c(w)$$

نشانه cos است

فوریه معکوس کسینوسی f:

$$F_c^{-1}(\tilde{f}_c(w)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{f}_c(w)\cos(wx)\,dw = f(x)$$

دفتر فنی ایلیا
۳۳۶۹۸۷۲۱
۴۵ متری ده متری پاسگاه دانشجو پلاک ۵

قضیه: (برای لپلاس تابع مشتق)

اگر $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ داریم:

$$F_s(f'') = -w^2 F_s(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, w f(0)$$

«خیلی مهم»

$$F_c(f'') = -w^2 F_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, f'(0)$$

اثبات کنید (سؤال امتحانی)

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۲ Date. ۵/۱

مثال:
ابتدا تبدیل فوریه $f(x) = e^{-|x|}$ را بیابید و سپس به کمک آن حاصل انتگرال

$$\int_0^\infty \frac{\cos(w\ln x^3)}{1+w^2}\,dw$$

را محاسبه کنید.

حل: چون دارای قدرمطلق در $f(x)$ هستیم باید ۲ بازه مختلف (مثبت و منفی) تعیین کنیم در نتیجه تابع $f(x)$ تابعی نامتناهی است.

* چون تبدیل فوریه خواسته فوراً تابع $f(x)$ را در فرمول جایگذاری می‌کنیم:

$$F(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-iwx}\,dx$$

$$F(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,e^{-iwx}\,dx \qquad \text{شکستن بازه}$$

$$F(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} \underbrace{e^{x}e^{-iwx}}_{e^{(1-iw)x}}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} \underbrace{e^{-x}e^{-iwx}}_{e^{-(1+iw)x}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-iw)}\left[e^{(1-iw)x}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{-1}{\sqrt{2\pi}(1+iw)}\left[e^{-(1+iw)x}\right]_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+iw} + \frac{1}{1-iw}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1-iw+1+iw}{1+w^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+w^2)} = \tilde{f}(w)$$

PAPCO ادامه ⇐

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامه حل:

* اگر در مسئله‌ای ابتدا گفتند یک تبدیل فوریه (سینوسی، کسینوسی، ...) حساب کنید و سپس یک انتگرال داده شد آن را حساب کنیم (مانند این مسئله) حتماً از تابع f بدست آمده، فوریه معکوس می‌گیریم:

$$F^{-1}(\tilde{f}(\omega)) = f(x)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}(1+\omega^2)}e^{i\omega x}\,d\omega = f(x)$$

* چون انتگرالی که می‌خواهیم بدست آوریم (انتگرال داده شده) داخلش مثلثاتی است e را از طریق فرمول اویلر به مثلثاتی تبدیل کنیم

$$* \quad e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i\sin(\omega x)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{1+\omega^2}\,d\omega + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\omega x)}{1+\omega^2}\,d\omega = f(x)$$

(صورت و مخرج انتگرال اول: زوج ← زوج؛ صورت انتگرال دوم فرد و مخرج زوج ← فرد، $=0$)

چون تابع داخل انتگرال زوج است →

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{1+\omega^2}\,d\omega = f(x)$$

$$x = \ln 3 \rightarrow \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(\omega \ln 3)}{1+\omega^2}\,d\omega = f(\ln 3) = e^{-\ln 3} = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \int_{0}^{\infty}\frac{\cos(\omega \ln 3)}{1+\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{6}$$

* تذکر مهم:

تبدیل فوریه متناهی حذف است (صفحه ۳۴ کتاب)

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

حل معادلات موج و گرمای نامتناهی ($-\infty<x<\infty$) به کمک تبدیل فوریه:

معادلات موج و گرمای نامتناهی شرایط مرزی ندارند ولی ما ۲ شرط زائد را جهت بعضی وجه منطقی

در خصوص موج می‌گیریم: $-\infty<x<\infty$, $u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)$: معادله موج

شرایط موج نامتناهی:

$$\begin{cases} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases} \Rightarrow \text{شرایط اولیه}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t)=\lim_{x\to\pm\infty} u_x(x,t)=0 \quad : \text{شرایط زائد}$$

$-\infty<x<\infty$, $u_t-c^2u_{xx}=F(x,t)$: معادله گرما

شرایط معادله گرمای نامتناهی:

$$u(x,0)=f(x) \quad \text{شرط اولیه}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} U(x,t)=\lim_{x\to\pm\infty} U_x(x,t)=0 \quad : \text{شرایط زائد}$$

برای حل مسئله از طرفین معادله تبدیل فوریه می‌گیریم و مسئله در صورتی دارای جواب است که توابع $F(x,t)$ و $f(x)$ و $g(x)$ در بازه $-\infty<x<\infty$ تکه‌ای پیوسته و مطلقاً انتگرال‌پذیر باشند.

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject,
Year. ۸۵ Month. ۲ Date. ۵

مثال: * سریع متوجه می‌شویم ناهمگن است زیرا همهٔ نواحی را نپوشاند *

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = \begin{cases} x+t, & |x|<1 \rightsquigarrow -1<x<1 \\ 0, & |x|>1 \rightsquigarrow \begin{cases} x>1 \\ x<-1 \end{cases} \end{cases} \\ u(x,0) = \begin{cases} x^2, & |x|<\pi \\ 0, & |x|>\pi \end{cases} \rightsquigarrow \text{شرایط اولیه} \end{cases}$$

روش اول حل: استفاده از تفکیک متغیرها است.

روش دوم حل:

حال از طرفین تبدیل فوریه می‌گیریم: (رابطه ۱)

$$F(u_t) - 4(u_{xx}) = F\left(\begin{cases} x+t, & |x|<1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}\right)$$

یادآوری:

$$\begin{cases} F(f''(x)) = -\omega^2 F(f(x)) \rightarrow F(u_{xx}(x,t)) = -\omega^2 \tilde{u}(\omega,t) \\ F(u_t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-i\omega x} dx = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u e^{-i\omega x} dx\right) = \tilde{u}_t \end{cases}$$

* اگر بخواهیم از u_t تبدیل فوریه بگیریم به $\tilde{u}_t$ و اگر از u_{tt} تبدیل بگیریم به $\tilde{u}_{tt}$ تبدیل می‌شود ولی u_x را هنگامی که تبدیل می‌گیریم از فرمول می‌نویسیم

جاگذاری یادآوری در رابطه ۱:

$$\tilde{u}_t - 4(-\omega^2 \tilde{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} (x+t) e^{-i\omega x} dx$$

$f(x)$ — در بقیهٔ بازه‌ها $u(x,t)=0$ است

t را از انتگرال بیرون می‌آوریم:

$$\tilde{u}_t + 4\omega^2 \tilde{u} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} x e^{-i\omega x} dx}_{H(\omega)} + t \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-i\omega x} dx}_{K(\omega)}$$

ادامه ←

چون x با قرار دادن در $\int$ از بین می‌رود و با ω می‌ماند

PAPCO

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۱ Date. ۵ ۱

ادامه حل: خطی مرتبه اول:

$\rightarrow \tilde{U}_t + 4\omega^2 \tilde{U} = H(\omega) + t\,K(\omega)$

$\rightarrow \tilde{U}(\omega,t) = e^{-4\omega^2 t}\left[\int e^{4\omega^2 t}\left(H(\omega)+t\,K(\omega)\right)dt + a(\omega)\right]$

قبلاً a_n می‌گرفتیم.

$H(\omega)+tK(\omega)$ ⊕	$e^{4\omega^2 t}$
$K(\omega)$ ⊖	$\frac{1}{4\omega^2}e^{4\omega^2 t}$
0	$\frac{1}{16\omega^4}e^{4\omega^2 t}$

حال جواب انتگرال داخل کروشه را (بوسیله جدول) جایگذاری می‌کنیم:

$\rightarrow \tilde{U}(\omega,t) = e^{-4\omega^2 t}\left[\frac{H(\omega)+tK(\omega)}{4\omega^2}e^{4\omega^2 t} - \frac{K(\omega)}{16\omega^4}e^{4\omega^2 t} + a(\omega)\right]$

$\rightarrow \tilde{U}(\omega,t) = \frac{H(\omega)+tK(\omega)}{4\omega^2} - \frac{K(\omega)}{16\omega^4} + a(\omega)e^{-4\omega^2 t}$ رابطه *

$t=0 \rightarrow \tilde{U}(\omega,0) = \frac{H(\omega)}{4\omega^2} - \frac{K(\omega)}{16\omega^4} + a(\omega)$ رابطه ①

* تنها مشکل ما (مجهول ما) $a(\omega)$ است که از شرایط اولیه استفاده کرده و داریم:

حال از شرایط اولیه یعنی $U(x,0) = \begin{cases} x^2, & |x|<\pi \\ 0; & |x|>\pi \end{cases}$ تبدیل فوریه می‌گیریم:

$\tilde{U}(\omega,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-i\omega x}\,dx = P(\omega)$ رابطه ②

در تغییر بازه ۰ = $U(x,0)$ است. — یک اسم است

PAPCO — ادامه حل

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year: ۸۵ Month: ۲ Date: ۵ ۱

ادامه‌ی حل:

رابطه‌ی ② = رابطه‌ی ①

$$a(\omega) = P(\omega) - \frac{H(\omega)}{4\omega^2} + \frac{K(\omega)}{16\omega^4}$$ ← جایگذاری $a(\omega)$ در رابطه‌ی *

ضمن رابطه‌ی * داریم →

$$\tilde{U}(\omega,t) = \frac{H(\omega)+tK(\omega)}{4\omega^2} - \frac{K(\omega)}{16\omega^4} + \left(P(\omega) - \frac{H(\omega)}{4\omega^2} + \frac{K(\omega)}{16\omega^4}\right)e^{-4\omega^2 t}$$

حال ما $\tilde{U}(\omega,t)$ را داریم و با یک تبدیل معکوس مرتبه‌ی ۰ $U(\omega,t)$ را یافت:

فوریه‌ی معکوس می‌گیریم →

$$U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\omega,t)\, e^{i\omega x}\, d\omega$$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

مسئله:

$$u_{tt} - 9u_{xx} = \begin{cases} x - t^2 & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}$$

شرایط مرزی

$$\begin{cases} u(x,0) = \begin{cases} 1+x & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases} \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

دفتر فنی ایلیا ۳۳۶۹۸۷۲۱

معادلهٔ فوق، معادلهٔ موج ناهمگن است و باید از طرفین فوریه بگیریم:

$$F(u_{tt}) - 9F(u_{xx}) = F\left(\begin{cases} x - t^2 & |x| < \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases}\right)$$

$$\tilde{u}_{tt} - 9(-\omega^2 \tilde{u}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} (x - t^2)\, e^{-i\omega x}\, dx$$

t را از داخل انتگرال خارج می‌کنیم:

$$\tilde{u}_{tt} + 9\omega^2 \tilde{u} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-i\omega x}\, dx}_{H(\omega)} - t^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\omega x}\, dx}_{K(\omega)}$$

$$\tilde{u}_{tt} + 9\omega^2 \tilde{u} = H(\omega) - t^2 K(\omega)$$ معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم

معادلهٔ مشخصه: $\lambda^2 + 9\omega^2 = 0 \to \lambda^2 = -9\omega^2 \to \lambda = \pm 3\omega i \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 3\omega \end{cases}$

تذکر مهم: $u(x,t) \longleftrightarrow \tilde{u}(\omega,t)$

$$\tilde{u}(\omega,t) = a(\omega)\cos(3\omega t) + b(\omega)\sin(3\omega t) + \tilde{u}^*(\omega,t)$$ رابطهٔ (*)

جواب خصوصی از طریق لاگرانژ

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject.
Year. ۸۵ Month. ۲ Date. ۱۲/۱

* ابتدا باید با کمک شرایط مرزی، $a(\omega)$ و $b(\omega)$ را یافت و سپس با فوریه معکوس گرفتن u را یافت.

* در رابطه t = ۰ ⟸ $\tilde{u}(\omega,0) = a(\omega) + \tilde{u}^*(\omega,0)$ ① رابطه

* در رابطه ⟸ مشتق نسبت به t ⟸

$$\Rightarrow \tilde{U}_t(\omega,t) = -3\omega a(\omega)\sin(3\omega t) + 3\omega b(\omega)\cos(3\omega t) + \tilde{U}_t^*(\omega,t)$$

$$t=0 \Rightarrow \tilde{U}_t(\omega,0) = 3\omega b(\omega) + \tilde{U}_t^*(\omega,0)$$ ② رابطه

حال از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم:

$$U(x,0) = \begin{cases} 1+x & |x|<1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases} \xrightarrow{\text{فوریه می‌گیریم}} \tilde{u}(\omega,0) = \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}(1+x)e^{-i\omega x}dx}^{P(\omega)}$$

$$\longrightarrow \tilde{u}(\omega,0) = P(\omega)$$ ③ رابطه

$$U_t(x,0) = 0 \xrightarrow{\text{فوریه می‌گیریم}} \tilde{U}_t(\omega,0) = 0$$ ④ رابطه

U_t: «مشتق U نسبت به t»

ادامه حل ⟵

PAPCO

دفتر فنی ایلیا ۳۳۶۹۸۷۲۱
۴۵ متری ... حق پاسخ دانشجو ...

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامهٔ حل:

① = ③ ⟶ $a(\omega) = P(\omega) - \tilde{U}^{*}(\omega, 0)$

② = ④ ⟶ $b(\omega) = \dfrac{-\tilde{U}_t(\omega, 0)}{3\omega}$

حال $a(\omega)$ و $b(\omega)$ بدست آمده را در رابطهٔ * قرار می‌دهیم سپس یک تبدیل فوریه می‌گیریم تا u بدست آید:

$$\tilde{U}(\omega, t) = \left(P(\omega) - \tilde{U}^{*}(\omega, 0)\right)\cos(3\omega t) - \frac{\tilde{U}_t(\omega, 0)}{3\omega}\sin(3\omega t) + \tilde{U}^{*}(\omega, t)$$

جواب معادله: فوریهٔ معکوس می‌گیریم ⟶ $u(x, t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\omega, t)\, e^{i\omega x}\, d\omega$

تذکر مهم:

* در امتحان اگر معادلهٔ موج متناهی بود روش تفکیک متغیرها را استفاده کرده ولی اگر نیمه متناهی و نامتناهی بود از فوریه استفاده می‌کنیم.

Subject:
Year: ۸۵ Month: ۲ Date: ۱۲

۱) موج و گرمای نیمه متناهی ($0 < x < \infty$) :

معادله موج: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$

شرایط موج نیمه متناهی:

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$ شرایط اولیه

$u(0,t) = P(t)$ ← شرط مرزی ⇐ چون یک سر ∞ است یک شرط مرزی داریم

$\lim_{x \to \infty} u(x,t) = 0$ ← شرط زاید (همواره برقرار است)

شرایط دما نیمه متناهی:

$u(x,0) = f(x)$ شرط اولیه

$u(0,t) = P(t)$ شرط مرزی ⇐ چون یک سر ∞ است یک شرط مرزی داریم

$\lim_{x \to \infty} u(x,t) = 0$ شرط زاید

مسائل فوق در صورتی دارای جواب است که توابع $F(x,t)$ ، $f(x)$ و $g(x)$

در بازه‌ی $0 < x < \infty$ مطلقاً انتگرال پذیر باشند.

در غیر اینصورت:

چنانچه مرز همگن نباشد، آن را همگن می‌کنیم و سپس شرط وجود جواب را

PAPCO

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

برای مسئله‌ی جدید (۲۰) بررسی می‌کنیم

* تذکر مهم:

اگر توابع مطلقاً انتگرال‌پذیر باشند نیازی به همگن کردن مرز نداریم

برای همگن کردن شرط مرزی $w(x,t)$ را با توجه به شرط مرزی به یکی از دو صورت زیر می‌گیریم:

$u(0,t) = P(t)$ شرط مرزی → $w(x,t) = a$

$u_x(0,t) = P(t)$ شرط مرزی → $w(x,t) = ax$

برای حل معادله، چنانچه شرط مرزی به صورت $u(0,t) = P(t)$ باشد، از طرفین معادله تبدیل فوریه sin ای می‌گیریم

و چنانچه شرط مرزی به صورت $u_x(0,t) = P(t)$ باشد، از طرفین معادله تبدیل فوریه cos ای می‌گیریم

Subject:
Year ۸۵ Month ۲ Date ۱۲

مثال:

معادله‌ی زیر را حل کنید. (صفحه ۲۵۴ مسئله ۴.۴)

$$U_t - U_{xx} = \begin{cases} 24 & 0 < x < \pi \\ 1 & x > \pi \end{cases}$$

شرایط معادله:

$$\begin{cases} u(x,0) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases} & \rightarrow \text{شرایط اولیه} \\ u(0,t) = t-1 & \text{مرز ناهمگن} \end{cases}$$

* مطلقاً انتگرال‌پذیر نیست یعنی باید قسمتی که $x > \pi$ است، انتگرالش ۰ شود.

$$\int_\pi^\infty 1 \, dx = x \Big|_\pi^\infty = \infty \quad \times$$

پس فقط یک شانس داریم و آن این است که مرز را همگن کنیم و سپس مطلقاً انتگرال‌پذیری را بررسی کنیم:

$$\begin{cases} V_t - V_{xx} = ? \\ V(x,0) = ? \\ V(0,t) = 0 & \text{مرز همگن} \end{cases}$$

$U(x,t) = V(x,t) + a$ یافتن a از طریق مرز ناهمگن

$U(0,t) = V(0,t) + a \longrightarrow a = t-1$

$U(x,t) = V(x,t) + t - 1$ رابطه‌ی (*)

PAPCO

ادامه‌ی حل ←

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامهٔ حل: حال سلامت مثال ۴ را بررسی کنیم:

* درابطهٔ ۱ $\xrightarrow{t=0}$ $u(x,0)=v(x,0)-1$

$$\rightarrow v(x,0)=\begin{cases}2x+1, & 0<x<1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

* مطلقاً انتگرال پذیر می‌شود.

از * $\begin{cases}u_t=v_t+1\\ u_{xx}=v_{xx}\end{cases}$ در معادلهٔ اصلی می‌گذاریم $\rightarrow v_t+1-v_{xx}=\begin{cases}2t, & 0<x<\pi\\ 1, & x>\pi\end{cases}$

$$\rightarrow v_t-v_{xx}=\begin{cases}2t-1, & 0<x<\pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$$

چون مرز به صورت $u(0,t)$ است تبدیل فوریهٔ سینوسی می‌گیریم:

$$F_s(v_t)-F_s(v_{xx})=F_s\left(\begin{cases}2t-1 & 0<x<\pi\\ 0. & x>\pi\end{cases}\right)$$

یادآوری می‌کنیم: $F_s(f(x))=\tilde{f}_s(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)\,dx$

$$F_s(f''(x))=-\omega^2F_s(f(x))+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega f(0)\rightarrow$$

$$\rightarrow F_s(v_{xx})=-\omega^2\tilde{v}_s+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega\, v(0,t)$$

ادامهٔ حل ←

Subject:
Year ۸۵ Month ۲ Date ۱۲

ادامه حل:

$$(\tilde{V}_s)_t - \left(-\omega^2 \tilde{V}_s + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega\, V(0,t)\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} (2t-1)\sin(\omega x)\,dx$$

(ضمیمه: $V(0,t)$ خط خورده و با فلش به 0)

حال t را از داخل انتگرال بیرون می کشیم:

خطی مرتبه اول:
$$(\tilde{V}_s)_t + \omega^2 \tilde{V}_s = (2t-1)\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} \sin(\omega x)\,dx}_{H(\omega)} = (2t-1)H(\omega)$$

$$\tilde{V}_s(\omega,t) = e^{-\omega^2 t}\left[\int e^{\omega^2 t}(2t-1)H(\omega)\,dt + a(\omega)\right]$$

چون انتگرال نامعین است (بدون کران است) الزاماً جا به جا حل شود:

$(2t-1)H(\omega)$ (+)	$e^{\omega^2 t}$
$2H(\omega)$ (−)	$\frac{1}{\omega^2}e^{\omega^2 t}$
0	$\frac{1}{\omega^4}e^{\omega^2 t}$

$$\tilde{V}_s(\omega,t) = e^{-\omega^2 t}\left[\frac{(2t-1)H(\omega)}{\omega^2}e^{\omega^2 t} - \frac{2H(\omega)}{\omega^4}e^{\omega^2 t} + a(\omega)\right]$$

$$\tilde{V}_s(\omega,t) = \frac{(2t-1)H(\omega)}{\omega^2} - \frac{2H(\omega)}{\omega^4} + a(\omega)e^{-\omega^2 t}$$

PAPCO ادامه حل ←

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامهٔ حل:

قبل از این که از رابطهٔ * تبدیل معکوس بگیریم ابتدا باید $a(\omega)$ را بیابیم:

رابطهٔ ۱: $\xrightarrow{t=0}$ در رابطهٔ ۱: $\tilde{V}_S(\omega,0) = \frac{-H(\omega)}{\omega^2} - \frac{2H(\omega)}{\omega^4} + a(\omega)$ ①

$$V(x,0) = \begin{cases} 2x+1 & 0<x<1 \\ 0 & x>1 \end{cases} \xrightarrow{\text{فوریه سینوسی می‌گیریم}} \tilde{V}_S(\omega,0) = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 (2x+1)\sin\omega x\,dx}_{K(\omega)}$$

$\longrightarrow \tilde{V}_S(\omega,0) = K(\omega)$ ② رابطهٔ ۲

$$① = ② \longrightarrow a(\omega) = K(\omega) + \frac{H(\omega)}{\omega^2} + \frac{2H(\omega)}{\omega^4}$$

جایگذاری $a(\omega)$ در: $\longrightarrow \tilde{V}_S(\omega,t) = \frac{(2t-1)H(\omega)}{\omega^2} - \frac{2H(\omega)}{\omega^4} + \left(K(\omega) + \frac{H(\omega)}{\omega^2} + \frac{2H(\omega)}{\omega^4}\right)e^{-\omega^2 t}$

$\xrightarrow[\text{معکوس می‌گیریم}]{\text{فوریه سینوسی}}$ $V(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \tilde{V}_S(\omega,t)\sin(\omega x)\,d\omega$ جواب معادله

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

تشکری به نام تست امتحانی است آن کارها را می کنیم

۹۲ . از

Subject:

Year ۸۵ Month. ۲ Date. ۱۲

* مسئله ی ۳ صفحه ۲۱۶ کتاب: (ص ۲):

$u_{xx}+u_{yy}=ye^{-x} \qquad 0<x<\infty \quad , \quad 0<y<1$

شرایط:

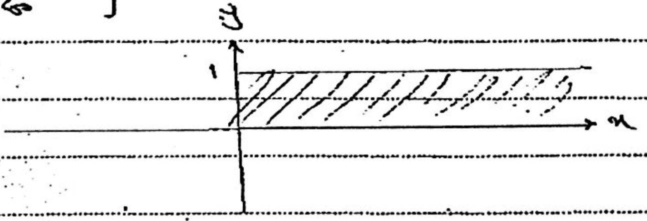
$u(0,y)=1 \Rightarrow$ شرط مرزی

$u(x,0)=0$

$u(x,1)=e^{-x}$ } شرایط اولیه فرض می کنیم

$\lim_{x\to\infty} u(x,y)=0$

} همه مرزی



$\int_0^\infty 0\,dx=0$ مطلقا انتگرال پذیر

$\int_0^\infty e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^\infty=-e^{-\infty}+e^{0}=1$ مطلقا انتگرال پذیر

پس چون $F(x,t)$ و $f(x)$ و $g(x)$ مطلقا انتگرال پذیر است، نیازی به همگن کردن شرایط مرزی نداریم:

$F_s(u_{xx})+F_s(u_{yy})=F_s(ye^{-x})$

چون شرط مرزی $u(0,y)=1$ است فوریه سینوسی می گیریم

$= -\omega^2\tilde{U}_s+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega\, u(0,y)+(\tilde{U}_s)_{yy}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty ye^{-x}\sin(\omega x)\,dx = yH(\omega)$

$\Rightarrow (\tilde{U}_s)_{yy}-\omega^2\tilde{U}_s=yH(\omega)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega$

PAPCO

ادامه حل ←

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۲ Date. ۱۲/۱

ادامه حل:

$$(\tilde{U}_s)_{yy} - \omega^2 \tilde{U}_s = y H(\omega) - \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\, \omega$$

معادله کمکی ⇐ $\lambda^2 - \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda = \pm \omega$ دو ریشه حقیقی

رابطه (*):

$$\tilde{U}_s(\omega, y) = a(\omega)\cosh(\omega y) + b(\omega)\sinh(\omega y) - \frac{y H(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \omega}{\omega^2}$$

(جواب خصوصی)

* در رابطه $\xrightarrow{y=0}$ $\tilde{U}_s(\omega, 0) = a(\omega) + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega}$ رابطه ①

رابطه ②:

* در رابطه $\xrightarrow{y=1}$ $\tilde{U}_s(\omega, 1) = a(\omega)\cosh(\omega) + b(\omega)\sinh(\omega) - \frac{H(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \omega}{\omega^2}$

$U(x, 0) = 0$ $\xrightarrow{\text{فوریه سینوسی می‌گیریم}}$ $\tilde{U}_s(\omega, 0) = 0$ رابطه ③

$U(x, 1) = e^{-x}$ $\xrightarrow{\text{فوریه سینوسی می‌گیریم}}$ $\tilde{U}_s(\omega, 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \sin(\omega x)\, dx$

$\longrightarrow \tilde{U}_s(\omega, 1) = H(\omega)$ رابطه ④

ادامه حل ←

PAPCO

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year ۸۵ Month ۲ Date ۱۲

ادامه حل:

$$① = ③ \Rightarrow a(\omega) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega}$$

$$② = ④ \Rightarrow b(\omega) = \frac{H(\omega) + \frac{H(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega}{\omega^2} + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega}\cosh(\omega)}{\sinh(\omega)}$$

حال $a(\omega)$ و $b(\omega)$ را در رابطه‌ی * جایگذاری می‌کنیم:

$$\rightarrow \tilde{U}_s(\omega, y) = \frac{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\omega}\cosh(\omega y) + \frac{H(\omega) + \frac{H(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega}{\omega} \cosh(\omega)}{\sinh(\omega)} \sinh(\omega y) - \frac{yH(\omega) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega}{\omega^2}$$

فوریه‌ی سینوسی معکوس می‌گیریم $\rightarrow$

$$U(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \tilde{U}_s(\omega, y)\,\sin(\omega x)\,d\omega$$

Subject.
Year. ۸۵ Month. ۲ Date. ۱۹

حل

اعداد مختلط

مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}=\{x+iy \mid x,y\in\mathbb{R}\}$ که در آن $i=\sqrt{-1}$

در نتیجه: $i^2=-1$

تعریف:
فرض $z=x+iy$ آنگاه x را قسمت حقیقی z می‌نامیم و با نماد $Re(z)$ نشان می‌دهیم و y را قسمت موهومی z می‌نامیم و با نماد $Im(z)$ نشان می‌دهیم

مزدوج z را با نماد $\bar{z}$ نمایش می‌دهیم و $\bar{z}=x-iy$

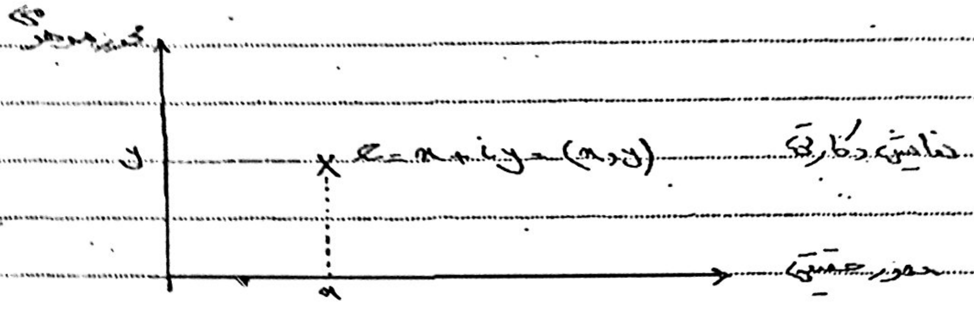
قدر مطلق z را با نماد $|z|$ نمایش می‌دهیم و $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

مثال:

$$z=2-3i \rightarrow \begin{cases} Re(z)=2 \\ Im(z)=-3 \\ \bar{z}=2+3i \\ |z|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13} \end{cases}$$

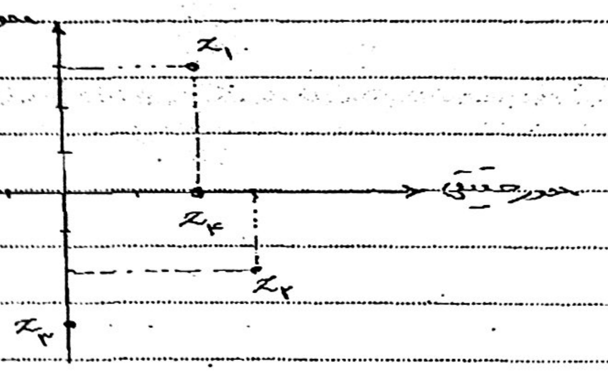
دانشجویان مهندسی پزشکی| WWW.BMESTU.IR

«نمایش اعداد مختلط»



مثال:

در صفحه مختلط نقاط $z_1 = 2+3i$ و $z_2 = 3-2i$ و $z_3 = -3i$ و $z_4 = 2$ را نشان دهید.



* i اصلاً وجود ندارد

PAPCO

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

اعمال روی اعداد مختلط:

در عمل جمع یا تفریق قسمت‌های حقیقی را باهم و قسمت‌های موهومی را باهم جمع یا تفریق می‌کنیم

در عمل ضرب مولفه به مولفه در هم ضرب می‌کنیم

در عمل تقسیم صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

مثال: $z_1 = 3 - 2i$ و $z_2 = 4 + 3i$

$z_1 + z_2 = 7 + i$

$z_2 - z_1 = 1 + 5i$

$z_1 z_2 = (3-2i)(4+3i) = 12 + 9i - 8i - 6i^2 = 18 + i$ ($i^2 = -1$)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-2i}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i} = \frac{12 - 9i - 8i + 6i^2}{16 - 9i^2} = \frac{6 - 17i}{25}$$

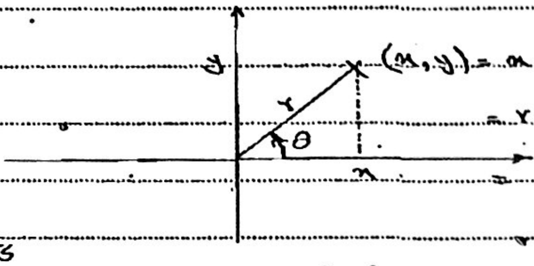
($i^2 = -1$)

دفتر فنی ۲۳۶۹۸۷۲۱

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year ۸۵ Month ۲ Date ۱۹

«نمایش قطبی اعداد مختلط»



$(x,y) = x + iy$ نمایش دکارتی

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$ نمایش مثلثاتی

$= re^{i\theta}$ نمایش قطبی

* r همواره مثبت و θ اگر در جهت عقربه‌ی ساعت باشد مثبت و در خلاف جهت عقربه‌ی ساعت منفی است

* تعریف اویلر: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

تذکر ۱:
در نمایش قطبی $re^{i\theta}$، r را قدر مطلق z می‌نامیم زیرا: $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

و θ را آرگومان z می‌نامیم و با نماد arg(z) نشان می‌دهیم

تذکر ۲: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$\rightarrow e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

$\rightarrow e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \rightarrow$ نتیجه می‌گیریم $e^{i\theta}$ و $e^{-i\theta}$ مزدوج یکدیگرند.

ادامه ←

PAPCO

دفتر فنی ایلیا
۳۳۶۹۸۷۲۱
۲۵ متری ده حقی پاساژ دانشجو پلاک ۵

تذکر ۳:

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta \end{cases} \rightarrow$$

$\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{۲}$
$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{۲i}$

تذکر ۴:

در روابط بالا θ را به $i\theta$ تبدیل کنیم داریم:

$$\cos(i\theta) = \frac{e^{i^۲\theta} + e^{-i^۲\theta}}{۲} = \frac{e^{-\theta} + e^{\theta}}{۲} \Rightarrow \cos(i\theta) = \cosh(\theta)$$

$$\sin(i\theta) = \frac{e^{i^۲\theta} - e^{-i^۲\theta}}{۲i} = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{۲i} = \frac{-۱}{i}\left(\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{۲}\right) =$$

$$= \frac{-i}{i^۲}\left(\frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{۲}\right) \Rightarrow \sin(i\theta) = i\sinh(\theta)$$

($i^۲ = -۱$)

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۲ Date. ۱۹

تذکر ۵:

رابطه ی بین دکارتی و قطبی به صورت زیر است:

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\theta = \arg(z) = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right), & x>0 \\ \pi + \mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right), & x<0 \\ \frac{\pi}{2} \Rightarrow & x=0,\ y>0 \\ -\frac{\pi}{2} \Rightarrow & x=0,\ y<0 \end{cases}$$

مثال:

عدد مختلط $z=-1+i$ را قطبی کنید:

$r = \sqrt{2}$

$$x<0 \Rightarrow \theta = \pi + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{-1}\right) = \pi - \mathrm{Arctan}(1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

** تابع فرد است و منفی را بیرون می دهیم.

$$z = re^{i\theta} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

مثال: عدد مختلط $z=3-i\sqrt{3}$ را قطبی کنید.

$r=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}$

θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	0
$\tan\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0

$x>0 \longrightarrow \theta = Arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$z = re^{i\theta} = \sqrt{12}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$

مثال:
عدد مختلط $z=2e^{-i\frac{\pi}{4}}$ را دکارتی کنید.

* برای تبدیل مختلط به دکارتی از فرمول اویلر استفاده می‌کنیم:

$z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject.
Year. ۸۵ Month. ۲ Date. ۱۹

«ریشه‌یابی در اعداد مختلط»:

مثال: معادلهٔ $z^2+z+1=0$ را حل کنید.

چون درجهٔ دوم است از Δ استفاده می‌کنیم:

$\Delta = b^2-4ac = 1-4 = -3 < 0$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-1}\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

«معادله‌ی دوجمله‌ای»:

معادله‌ای به فرم $w^n = z$ را معادلهٔ دوجمله‌ای می‌نامیم که در آن z عدد مختلط معلوم، n عدد طبیعی معلوم و w عدد مختلط مجهول می‌باشد که با حل معادله دوجمله‌ای محاسبه می‌گردد.

در حقیقت با حل معادلهٔ دوجمله‌ای توانسته‌ایم ریشهٔ n ام z را بدست آوریم.

برای این منظور z را قطبی می‌کنیم. فرض کنید $z = re^{i\theta}$ باشد، در این صورت w به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$w = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

PAPCO

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۲ Date. ۱۹

مثال: معادلهٔ $w^3 = i$ را در اعداد مختلط حل کنید:

$$x = 0 \,,\; y = 1 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$w = \sqrt[3]{1}\, e^{i\left(\frac{\pi/2}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \,,\; k = 0, 1, 2 \quad (n-1)$$

$$k = 0 \rightarrow w = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$k = 1 \rightarrow w = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$k = 2 \rightarrow w = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

PAPCO

Subject.
Year. ۸۵ Month. ۷ Date. ۱۹

مثال: معادلهٔ $w^4 + 2w^2 + 2 = 0$ را حل کنید.

$\{w^2 = z\} \Rightarrow z^2 + 2z + 2 = 0 \rightarrow z = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$

$\rightarrow w^2 = z = -1 \pm i \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$r = \sqrt{2}$:

$w^2 = z = -1 + i$

$x < 0 \rightarrow \theta = \pi + \operatorname{Arctan}(-1) = \frac{3\pi}{4}$

$w = \sqrt{\sqrt{2}}\, e^{i\left(\frac{3\pi/4}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right)} = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{3\pi}{8} + k\pi\right)}, \quad k = 0, 1$ ($n=1$)

$k = 0 \rightarrow w = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{3\pi}{8}}$

$k = 1 \rightarrow w = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{11\pi}{8}}$

$w^2 = -1 - i$ معادلهٔ دوم را:

$r = \sqrt{2}$

$x < 0 \rightarrow \theta = \pi + \operatorname{Arctan}(1) = \frac{5\pi}{4}$

$w = \sqrt{\sqrt{2}}\, e^{i\left(\frac{5\pi/4}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right)} = \sqrt[4]{2}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{8} + k\pi\right)}, \quad k = 0, 1$

$k = 0 \rightarrow w = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{5\pi}{8}}$

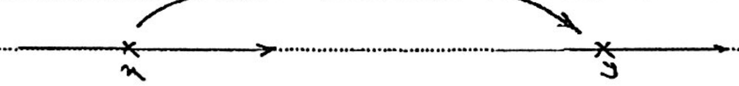
$k = 1 \rightarrow w = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{13\pi}{8}}$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

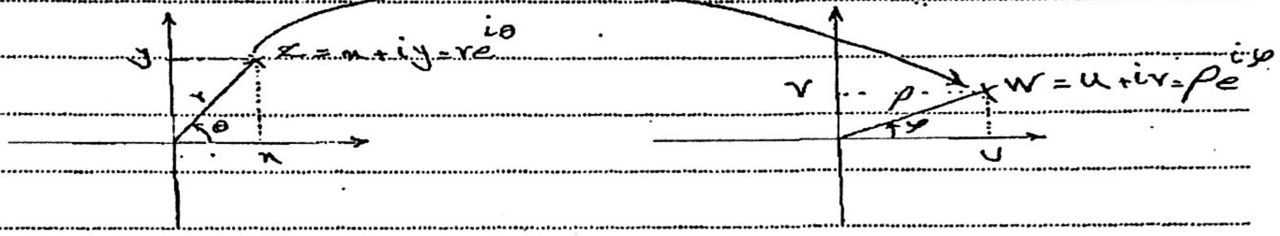
Subject.
Year. ۸۵ Month. ۲ Date. ۱۹

«توابع مختلط»:

$y=f(x)$ تابع حقیقی (تابع f، x را به y تصویر می‌کند)



$w=f(z)$ تابع مختلط

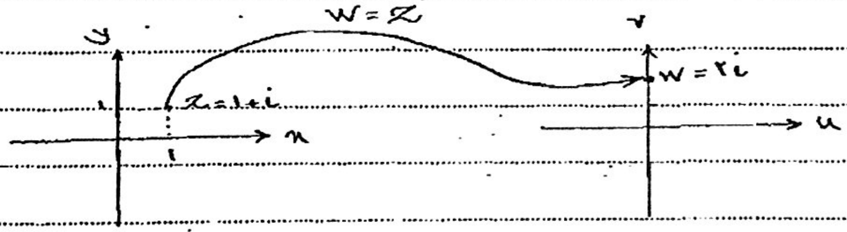


* تابع $w=f(z)$ نقطه z را به w تصویر می‌نماید *

مثال و مثال امتحانی!

تصویر نقطه $z=1+i$ را تحت تابع $w=z^2$ بیابید.

$w = z^2 = (1+i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 2i$



دفتر فنی ایلیا
۳۳۶۹۸۷۲۱

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

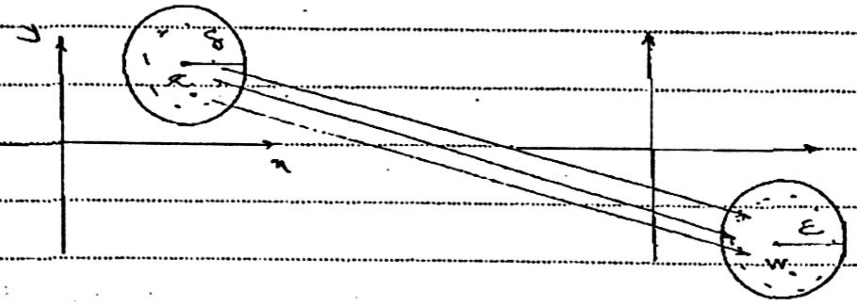
Subject:
Year. Month. Date. ( )

«حد توابع مختلط» :

گوییم $\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$ اگر و فقط اگر:

$\forall \varepsilon>0 , \exists \delta>0 , |z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)-w_0|<\varepsilon$

داخل دایره‌ای به مرکز z_0 و شعاع δ — داخل دایره‌ای به مرکز w_0 و شعاع ε



* در اعداد مختلط، قدر مطلق یعنی دایره ولی در اعداد حقیقی قدر مطلق یعنی فاصله

PAPCO

Subject:
Year ۸۵ Month ۲ Date ۱۹

مقصد:

فرض کنیم $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ و $z_0=x_0+iy_0$ در اینصورت:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + i\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

مثال:

مقدار $\lim_{z\to i} z^2$ را بیابید:

* اولین کار این است که z^2 را برحسب x و y نوشت:

$$z^2=(x+iy)^2=\underbrace{(x^2-y^2)}_{u}+i\underbrace{(2xy)}_{v}$$

$$\lim_{z\to i} z^2 = \lim_{(x,y)\to(0,1)}(x^2-y^2)+i\lim_{(x,y)\to(0,1)}(2xy)=(-1)+i(0)=-1$$

$i = 0 + (1)i$ ($x=0$, $y=1$)

PAPCO

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Mouth. ۲ Date. ۱۹

مثال: $\lim_{z\to 0} \frac{Re(z^2)}{|z|^2}$ را بیابید.

$z^2 = (x+iy)^2 = \overbrace{(x^2-y^2)}^{Re} + i(2xy)$

$\frac{Re(z^2)}{|z|^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

چون مبهم در نقطه است مسیر می‌دهیم

$\lim_{z\to 0} \frac{Re(z^2)}{|z|^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \xrightarrow{y=mx} \lim_{x\to 0} \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$ ✗ چون وابسته به m است حد موجود نیست

PAPCO

WWW.BMESTU.IR

« پیوستگی »:

تابع $w = f(z)$ را در z_0 پیوسته گوییم هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱ـ $f(z_0)$ موجود باشد.

۲ـ $\lim_{z \to z_0} f(z)$ موجود باشد.

۳ـ $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

مثال:

تابع $w = z^2$ در $z_0 = i$ پیوسته است زیرا:

$\lim_{z \to i} z^2 = -1$ در مثال قبلی ثابت شد

$f(i) = i^2 = -1$

مثال: تابع $w = \frac{Re(z^2)}{|z|^2}$ در $z = 0$ پیوسته نیست زیرا:

$\lim_{z \to 0} \frac{Re(z)^2}{|z|^2}$ * طبق مبحث حد ← موجود نمی‌باشد.

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

«مشتق توابع مختلط»:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

قضیه کوشی ـ ریمان (کاربرد مشتق‌گیری از توابع مختلط):

فرض کنیم $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ در نقاط در صفحه مختلط در دستگاه

کوشی ـ ریمان به فرم:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

صدق کند، f در این نقاط مشتق‌پذیر نیست. و چنانچه صدق کند f به شرطی مشتق‌پذیر

است که توابع u و v و u_x و v_x و v_y در این نقاط پیوسته باشند. در این صورت داریم:

$$f'(z) = u_x + i\,v_x$$

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

مثال: $w = z^2$

اولین کار تبدیل w به u و v است:

$$\rightarrow w = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u} + i\,\underbrace{(2xy)}_{v}$$

$$\begin{cases} u_x = 2x \; : \; \text{پیوسته (چون چندجمله‌ای است)} \\ v_y = 2x \; : \; \text{پیوسته (چون چندجمله‌ای است)} \end{cases} \rightarrow u_x = v_y$$

$$\begin{cases} u_y = -2y \; : \; \text{پیوسته} \\ v_x = 2y \; : \; \text{پیوسته} \end{cases} \Rightarrow u_y = -v_x$$

$w = z^2$ در تمام نقاط صفحهٔ مختلط مشتق‌پذیر است (تابع تام):

← ویژگی این توابع این است که مشتق آن‌ها

مانند توابع تک متغیره است.

$$f'(z) = u_x + i v_x = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$$

Subject.
Year ۸۵ Month ۲ Date ۲۹

مثال: $w = \bar{z}$ مزدوج z است

* ابتدا حتماً w را برحسب x و y بنویسید:

$\rightarrow w = \bar{z} = x + i(-y)$ ($u = x$, $v = -y$)

$\rightarrow \begin{cases} u_x = 1 \\ v_y = -1 \end{cases} \Rightarrow u_x \neq v_y$

$w = \bar{z}$ در هیچ نقطه‌ای از صفحهٔ مختلط مشتق ندارد.

مثال: $w = (Re(z))^2 + i\,(Im(z))^2$

* ابتدا حتماً برحسب x و y، w را درمی‌آوریم

$w = x^2 + i y^2$ ($u = x^2$, $v = y^2$)

$\begin{cases} u_x = 2x \\ v_y = 2y \end{cases} \Rightarrow$ وقتی $u_x = v_y$ که $y = x$ باشد

$\begin{cases} u_y = 0 \\ v_x = 0 \end{cases} \Rightarrow u_y = -v_x$

تابع فقط روی نقاط $x = y$ مشتق دارد $\Leftarrow$

$f'(z) = u_x + i v_x = 2x = 2Re(z) \xrightarrow{\text{مثلاً}} \begin{cases} f'(-1+2i) & \text{موجود نیست} \\ f'(2+2i) = 4 \\ f'(-1-1i) = -2 \end{cases}$

$-1 = -1$

PaPCO

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

مثال: $w=|z|^2$

$w=|z|^2 = \underbrace{x^2+y^2}_{u}$ و $v=0$

$\begin{cases} u_x = 2x \\ v_y = 0 \end{cases} \Rightarrow x=0$ ، $u_x=v_y$ وقتی

$w=|z|^2$ فقط در مبدأ مشتق دارد. $\Leftarrow$

$\begin{cases} u_y = 2y \\ v_x = 0 \end{cases} \Rightarrow$ وقتی $u_y=-v_x$ ، $y=0$ باشد

$f'(z) = u_x + i v_x = 2x \Rightarrow f'(z) = \begin{cases} 0 & z=0 \\ \text{موجود نیست} & z\neq 0 \end{cases}$

مثال: $w=e^z$

* طبق اویلر

$\rightarrow w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \underbrace{e^x \cos y}_{u} + i\, \underbrace{e^x \sin y}_{v}$

$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} u_x = e^x \cos y \\ v_y = e^x \cos y \end{cases} \Rightarrow u_x = v_y \\ \begin{cases} u_y = -e^x \sin y \\ v_x = e^x \sin y \end{cases} \Rightarrow u_y = -v_x \end{array}\right\} \Rightarrow$ $w=e^z$ تابع تام است یعنی در تمام نقاط مشتق‌پذیر است.

$f'(z) = u_x + i v_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x \overbrace{(\cos y + i \sin y)}^{e^{iy}} = e^x e^{iy}$
$= e^{x+iy}$
$= e^z$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

مثال: $w = \cos z$

در این کار، در حل این مسائل تبدیل z به $x+iy$ است:

(بسط می‌دهیم)

$w = \cos(x+iy) = \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy)$

$= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

$v = -\sin x \sinh y$

$$\begin{cases} u_x = -\sin x \cosh y \\ v_y = -\sin x \cosh y \end{cases} \Rightarrow u_x = v_y$$

$$\begin{cases} u_y = \cos x \sinh y \\ v_x = -\cos x \sinh y \end{cases} \Rightarrow u_y = -v_x$$

$\Rightarrow$ تابع تام

$f'(z) = u_x + i v_x = -\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$

$= -(\sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)) = -\sin(x+iy) = -\sin z$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

قضیه‌ی کوشی ـ ریمان در فرم قطبی:

فرض کنیم: $w = f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$ در این صورت دستگاه

معادلات کوشی ـ ریمان به فرم زیر است:

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} v_\theta \\ v_r = -\frac{1}{r} u_\theta \end{cases}$$

و مشتق از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$f'(z) = (u_r + i v_r)\, e^{-i\theta}$$

* در این حالت به جای z، $re^{i\theta}$ قرار می‌دهیم

مثال: $w = z^9 \Rightarrow$ اگر $z = x+iy$ قرار دهیم فاجعه رخ می‌دهد

$$w = (re^{i\theta})^9 = r^9 e^{i9\theta} \overset{\text{اویلر}}{=} \underbrace{r^9 \cos(9\theta)}_{u} + i\,\underbrace{r^9 \sin(9\theta)}_{v}$$

$$\begin{cases} u_r = 9r^8 \cos(9\theta) \\ v_\theta = 9r^9 \cos 9\theta \end{cases} \Rightarrow u_r = \frac{1}{r} v_\theta$$

$\Rightarrow$ تابع تام است.

$$\begin{cases} v_r = 9r^8 \sin(9\theta) \\ u_\theta = -9r^9 \sin(9\theta) \end{cases} \Rightarrow v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$$

فاکتور از $9r^8$

$$f'(z) = (u_r + i v_r)e^{-i\theta} = (9r^8\cos 9\theta + i\,9r^8 \sin(9\theta))\,e^{-i\theta} = 9r^8(\cos 9\theta + i \sin 9\theta)e^{-i\theta}$$

$$= 9r^8 e^{i9\theta} e^{-i\theta} = 9(re^{i\theta})^8 = 9z^8$$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

تابع $w = \text{Ln}\, z$: (سؤال امتحان: فرق بین $\ln z$ (تابع نیست) و $\text{Ln}\, z$ (تابع است.) چیست؟)

منظور «ال - ان» بزرگ است و تابع است. «ال-ان» کوچک

$w=\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln(re^{i(\theta+2\pi)}) = \ln r + \ln(e^{i(\theta+2\pi)})$

روی همان نقطهٔ $i\theta$ می‌افتد

$= \underbrace{\ln r}_{u} + i\underbrace{(\theta+2k\pi)}_{v} \; ; \; k\in Z$ * به ازای هر k، یک w خواهیم داشت

$w=\ln z$ تابع نیست زیرا برای هر z، بی‌نهایت مقدار برای w بدست می‌آید.

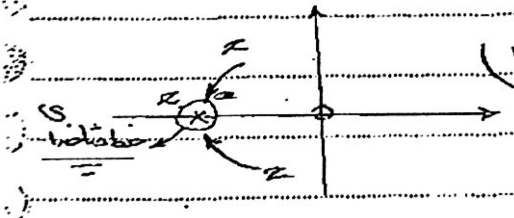
چنانچه θ را در محدودهٔ $-\pi<\theta<\pi$ اختیار کنیم، آنگاه یک تابع حاصل می‌شود

که آن را با $w=\text{Ln}\,z$ نشان می‌دهیم، بنابراین:

$w=\text{Ln}\,z = \ln(r+i\theta), \quad -\pi<\theta<\pi$ * مهم

(Ln: بزرگ — ln: کوچک)

* تابع مهم: تعریف خط شاخه‌ای: (سؤال امتحان!)



$\lim_{z\to z_0} \text{Ln}\,z = \ln r + i\pi$

$\lim_{z\to z_0} \text{Ln}\,z = \ln r - i\pi$

⇒ $\lim_{z\to z_0}\text{Ln}\,z$ = موجود نیست ⇒ $\text{Ln}\,z$ در z_0 پیوسته نیست
$f'(z_0)$ وجود ندارد.

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۲ Date. ۲۶

اگر شاخه ی پذیری Ln بزرگ خواسته شد باید بحث خط شاخه ای را انجام داد.

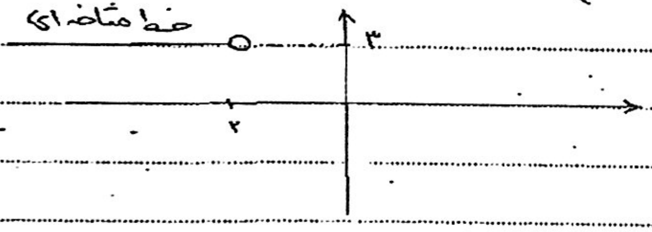
طریقه ی محاسبه ی خط شاخه ای:

$$w = \ln z = \ln(x+iy) \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ y=0 \end{cases}$$

* اگر شاخه پذیری Ln بزرگ خواسته شد، $x<0$ قرار می دهیم *

مثال: خط شاخه ای $w=\ln(z+2-3i)$ را بیابید.

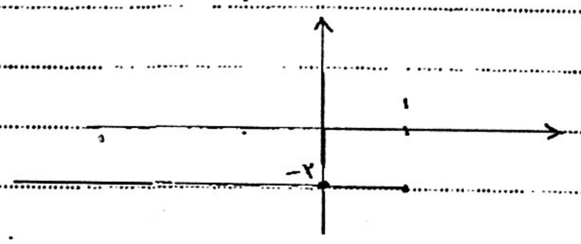
$$w=\ln(x+iy+2-3i)=\ln\left(\underbrace{(x+2)}_{<0}+i\underbrace{(y-3)}_{=0}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+2<0 \Rightarrow x<-2 \\ y-3=0 \Rightarrow y=3 \end{cases}$$



مثال:

در شاخه پذیری $w=\ln(z-1+2i)$ در صفحه ی مختلط بحث کنید.

$$w=\ln(x+iy-1+2i)=\ln\left(\overbrace{(x-1)}^{<0}+i\overbrace{(y+2)}^{=0}\right) \Rightarrow \begin{cases} x-1<0 \Rightarrow x<1 \\ y+2=0 \Rightarrow y=-2 \end{cases}$$



PAPCO

دفتر فنی ایلیا
۳۳۶۹۸۷۲۱

دانشجویان مهندسی پزشکی| WWW.BMESTU.IR

تذکر مهم:

در اعداد حقیقی صفر و اعداد منفی لگاریتم ندارند ولی در اعداد مختلط فقط صفر لگاریتم ندارد و اعداد منفی لگاریتم دارند.

مثال: $w = Ln(-2) = Ln(2e^{i\pi}) = Ln(2) + Ln(e^{i\pi}) = Ln(2) + i\pi$

(توجه کنید به قطعه)

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

تعریف تابع تحلیلی:

تابع f را در نقطه z_0 تحلیلی گوییم هرگاه:

به مرکز z_0 بتوان دایره‌ای زد به طوریکه f در تمام نقاط داخل آن دایره مشتق‌پذیر باشد.

مثال:
کلیهٔ توابع تام، در تمام نقاط صفحهٔ z تحلیلی هستند.

مثال:
$w = \bar{z}$ در هیچ نقطه مشتق ندارد (طبق صفحهٔ ۱۲۹ جزوه) بنابراین هیچ جا تحلیلی نیست.

مثال:
$w = |z|^2$ در $z = 0$ مشتق‌پذیر است ولی هیچ جا تحلیلی نیست.

مثال:
$w = (Re(z))^2 + i(Im(z))^2$ در نقاط $x = y$ مشتق‌پذیر است ولی هیچ جا تحلیلی نیست.

مثال:
$w = \ln z$ برای $\begin{cases} x \leq 0 \\ y = 0 \end{cases}$ مشتق ندارد. بنابراین در این نقاط تحلیلی نیست و در بقیهٔ نقاط تحلیلی است.

مثال: (سؤال چندین دوره امتحانی):

در تحلیلی بودن تابع $w = |x+y| + i|y-x|$ در صفحه مختلط بحث کنید.

* اولین کار در حل مسائل قدر مطلق، از بین بردن قدر مطلق است.

① : $x+y>0$, $y-x>0$:

$$w = \underbrace{(x+y)}_{u} + i\underbrace{(y-x)}_{v} \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y = 1 \\ u_y = -v_x = 1 \end{cases}$$

تابع در تمام نقاط ناحیه ① مشتق دارد.

② : $x+y>0$, $y-x<0$:

$$w = \underbrace{(x+y)}_{u} + i\underbrace{(x-y)}_{v=-(y-x)} \Rightarrow \begin{cases} u_x = 1 \neq v_y = -1 \end{cases}$$

در هیچ نقطه ناحیه ② مشتق ندارد.

③ : $x+y<0$, $y-x>0$:

$$w = \underbrace{(-x-y)}_{u} + i\underbrace{(y-x)}_{v} \Rightarrow \begin{cases} u_x = -1 \neq v_y = 1 \end{cases}$$

در هیچ نقطه ناحیه ③ مشتق ندارد.

④ : $x+y<0$, $y-x<0$:

$$w = \underbrace{(-x-y)}_{u} + i\underbrace{(x-y)}_{v} \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y = -1 \\ u_y = -v_x = -1 \end{cases}$$

در تمام نقاط ناحیه ④ مشتق دارد.

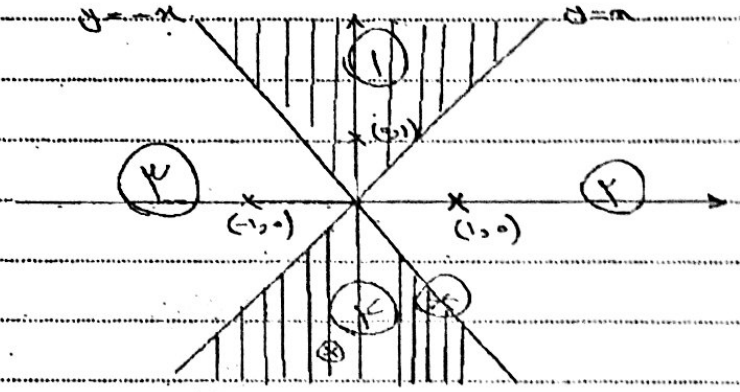
ادامه حل ⇐

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامهٔ حل:

برای این که در تحلیلی بودن بحث کنیم باید ابتدا نقاطی که مشتق دارند را مشخص کرده

سپس باید دید در چه نقاطی می‌توان دایره را زد:



تابع در نقاط ناحیهٔ ① و ④ تحلیلی و در نقاط ② و ③ و نقاط روی $y=x$ و $y=-x$ (نقاط مرزی) تحلیلی نمی‌باشد.

حل کنیم:

$$* \begin{cases} \omega = \ln z = \ln(x+iy) \\ \text{نقاط غیرتحلیلی} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases}$$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject.
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۲۱

توابع همساز:

تابع $u(x,y)$ را همساز می‌گوییم هرگاه در معادلهٔ لاپلاس صدق کند یعنی
$u_{xx}+u_{yy}=0$

مثال:
همساز بودن یا نبودن $u=x^2-y^2$ را بررسی کنید.

$$\begin{cases} u_{xx}=2 \\ u_{yy}=-2 \end{cases} \Rightarrow u_{xx}+u_{yy}=0$$ همساز است

قضیه: (ویژگی مهم توابع تحلیلی):

فرض کنیم $w=f(z)=u+iv$ تحلیلی باشد در این صورت u و v توابعی همساز هستند (هر دو در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کنند) یعنی $u_{xx}+u_{yy}=0$ و $v_{xx}+v_{yy}=0$ در اینصورت u و v را مزدوج همساز یکدیگر می‌نامیم و با داشتن یکی از آن‌ها می‌توان به کمک معادلات کوشی ـ ریمان مزدوج همساز آن را بدست آورد.

PAPCO

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

مثال:

مزدوج همساز u را بیابید و تابع تحلیلی $w = f(z) = u + iv$ را برحسب z بنویسید. $u = x^2 - y^2$

طبق مثال قبلی تابع $u = x^2 - y^2$ همساز است و برای یافتن مزدوج همساز آن می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_y = 2x \xrightarrow{\int dy} 2xy + c \\ v_x = 2y \xrightarrow{\int dx} 2xy + c \end{cases}$$

با بسیاری قرارداد $c = 0$ می‌شود.

حال جملات مشابه را یکبار و جملات غیرمشابه را نیز می‌نویسیم:

$\longrightarrow$ $v = 2xy$ مزدوج همساز

$$w = f(z) = u + iv = (x^2 - y^2) + i(2xy) = z^2$$

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۲

مثال:

a را چنان بیابید که $u = e^{ax}\sin(2y)$ همساز شود، ۲ مزدوج همساز آن را

بیابید و تابع تحلیلی $f(z) = u + iv$ را برحسب z بنویسید

برای اینکه تابع همساز باشد باید در معادله لاپلاس صدق کند:

$u_{xx} = a^2 e^{ax}\sin(2y)$

$u_{yy} = -4e^{ax}\sin(2y)$

$u_{xx} + u_{yy} = 0 \rightarrow (a^2 - 4)e^{ax}\sin(2y) \rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$

برای یافتن مزدوج همساز باید تابع حتماً همساز باشد یعنی اول باید a را جایگذاری کرده و

سپس مزدوج همساز را یافت: $a = 2 \Rightarrow u = e^{2x}\sin(2y)$ تابع همساز

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} v_y = 2e^{2x}\sin(2y) \xrightarrow{\int dy} -e^{2x}\cos(2y) \\ v_x = -2e^{2x}\cos(2y) \xrightarrow{\int dx} -e^{2x}\cos 2y \end{cases} \longrightarrow$$

در نتیجه: $\longrightarrow v = -e^{2x}\cos(2y)$ مزدوج همساز

$f(z) = u + iv = e^{2x}\sin(2y) - ie^{2x}\cos(2y) =$

$= -ie^{2x}\left(\cos(2y) - \frac{1}{i}\sin(2y)\right)$, $-\frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{-i}{i^2} = +i$

$= -ie^{2x}e^{i2y} = -ie^{2(x+iy)} = -ie^{2z}$

برای $a = -2$ خودتان بررسی کنید.

FAPCO

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

«انتگرال گیری از توابع مختلط روی منحنی»:

تابع $w = f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ روی منحنی C مفروض است. فرض کنیم C دارای

نمایش پارامتری به صورت زیر باشد:

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad a \leqslant t \leqslant b$$

انتگرال f روی C را با نماد $\int_C f(z)\,dz$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C f(x+iy)(dx+i\,dy) \xrightarrow{\text{در انتگرال پارامتری قرار می‌دهیم}}$$

$$= \int_a^b f\big(x(t)+i\,y(t)\big)\big(x'(t)+i\,y'(t)\big)\,dt$$

مثال در صفحه بعد ←

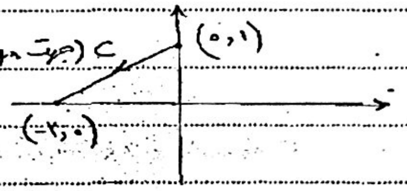
Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۲۱

مثال شماره ۱

مطلوب است محاسبه $\int_C z^2\,dz$ که در آن C متشکل از پاره خط $y=\frac{1}{2}x+1$ است که از نقطه ۱ $(0,1)$ و به نقطه ۲ $(-2,0)$ ختم می‌شود.

تذکر مهم:

برای پارامتری کردن خط از فرمول $\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=t$ که در آن (x_0,y_0) نقطه شروع و (x_1,y_1) نقطه پایان می‌باشد. در این پارامتری همواره $0\le t\le 1$



اولین کار، پارامتری کردن C است:

$$\to \frac{x-0}{-2-0}=\frac{y-1}{0-1}=t \Rightarrow \begin{cases} x=-2t \\ y=1-t \end{cases} \quad 0\le t\le 1$$

در $t=1$ نقطه پایان و در $t=0$ نقطه شروع داریم.

$$\int_C z^2\,dz=\int_C (x+iy)^2(dx+i\,dy)$$

$$=\int_0^1 (-2t+i(1-t))^2(-2-i)\,dt$$

$(3t^2+2t-1)+i(-4t+4t^2)$

$$=(-2-i)\int_0^1 \left(4t^2-(1-t)^2-4t(1-t)i\right)dt$$

$$=(-2-i)\left[(t^3+t^2-t)+i\left(-2t^2+\frac{4}{3}t^3\right)\right]_0^1=(-2-i)\left(1-\frac{2}{3}i\right)=$$

PAPCO

$$=-2+\frac{4}{3}i-i-\frac{2}{3}=-\frac{8}{3}+\frac{1}{3}i$$

دانشجویان مهندسی پزشکی| WWW.BMESTU.IR

مثال: شماره ۲

مطلوب است محاسبه انتگرال $\oint_c z^2 dz$ که در آن c دایره $x^2+y^2=4$ می‌باشد.

تذکر مهم:

چنانچه منحنی c دایره $x^2+y^2=a^2$ باشد، برای پارامتری کردن آن بهتر است از فرمول $z=ae^{it}$ استفاده کنیم و چنانچه مرکز دایره z_0 باشد آنگاه:
$z-z_0=ae^{it}$

حل:

$$z=2e^{it} \longrightarrow dz=2ie^{it}dt$$

$$\oint_c z^2 dz=\int_0^{2\pi}(2e^{it})^2(2ie^{it}dt)$$

$$\int e^{3it}=\frac{1}{3i}e^{3it}$$

$$=8i\int_0^{2\pi}e^{3it}dt=\frac{8}{3}\left[e^{i3t}\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{8}{3}\left[e^{i2\pi}-1\right]=0$$

طبق اویلر = ۱

Subject.
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۲۱

مثال:

مطلوب است محاسبهٔ $\oint_c \bar{z}\,dz$ که در آن c دایرهٔ $x^2+y^2=4$ است

$$\oint_c \bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \overline{(2e^{it})}\,(2ie^{it}\,dt)$$

* تذکر مهم: $\overline{(e^{it})} = e^{-it}$

$$= \int_0^{2\pi} 2e^{-it}\,2ie^{it}\,dt = 4i\int_0^{2\pi} dt = 8\pi i$$

PAPCO

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

قضیه کوشی - گورسا :

فرض کنیم $w=f(z)$ در ناحیه D تحلیلی باشد و c منحنی بسته واقع در D باشد در این صورت:

$$\oint_c f(z)\,dz = 0$$

EX: $\oint_{|z|=2} z^2\,dz = 0$

$|z|=2$: دایره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ

EX: $\oint_{|z-2i|=1/2} e^{z}\cos z\,dz = 0$

(e^z تحلیلی، $\cos z$ تحلیلی، $e^z \cos z$ تحلیلی)

$|z-2i|=1/2$: دایره‌ای به مرکز $2i$ و شعاع $1/2$

نتیجه قضیه کوشی - گورسا : (برای منحنی‌های باز است)

فرض کنیم $f(z)$ در ناحیه D تحلیلی باشد و c منحنی واقع در D باشد که نقطه A را به نقطه B وصل می‌کند و $F(z)$ تابع اولیه $f(z)$ باشد در این صورت:

$$\int_c f(z)\,dz = F(z)\Big|_A^B = F(B) - F(A)$$

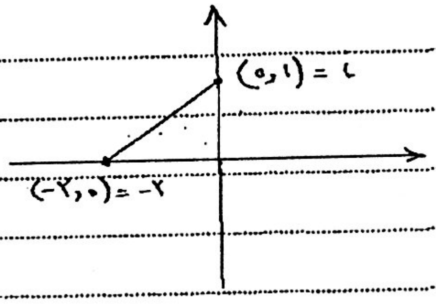
در این صورت محاسبه انتگرال مستقل از مسیر انتگرال‌گیری خواهد بود.

PAPCO

دفتر فنی ایلیا ۳۳۶۹۸۷۲۱ ۴۵ متری ده دقیقه پاساژ دانشجو طبقه

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

در مثال شماره‌ی ①:



دیگر لازم نیست به صورت پارامتری بنویسیم و چون z^2 تابع تحلیلی است و مسیر منحنی باز است
با استفاده از نتیجه‌ی کوشی - گورسا خواهیم داشت:

$$\int_c z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Big|_i^{-2} = \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(i)^3}{3} = -\frac{8}{3} + \frac{i}{3}$$

* تذکر مهم:

توابع تحلیلی نیازی به پارامتری کردن ندارند اگر منحنی بسته باشد انتگرالشان صفر است و در منحنی باز انتگرالشان از نتیجه‌ی قضیه‌ی کوشی - گورسا استفاده می‌کنیم.

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year: ۸۵ Month: ۳ Date: ۲۱

«قضیه تیلور» (بسط توابع در نقاط تحلیلی):

فرض کنیم f و تمام مشتقات آن در نقاط داخل دایره‌ای به مرکز z_0 موجود باشد. در اینصورت:

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots$$

بسط تیلور حول نقطه $z_0 = 0$ را بسط مک لورن می‌نامیم:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(z) + \frac{f''(z_0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!}z^3 + \cdots$$

PAPCO

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year ۸۵ Month ۳ Date ۲

مثال: بسط مک لورن $f(z)=\sin z$ را بیابید.

بسط مک لورن = بسط تیلور در $z_0=0$

$f(z)=\sin z \rightarrow f(0)=0$

$f'(z)=\cos z \rightarrow f'(0)=1$

$f''(z)=-\sin z \rightarrow f''(0)=0$

$f'''(z)=-\cos z \rightarrow f'''(0)=-1$

$f^{(4)}(z)=\sin z \rightarrow f^{(4)}(0)=0$

$f^{(5)}(z)=\cos z \rightarrow f^{(5)}(0)=1$

$f(z)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}z+\frac{f''(0)}{2!}z^2+\dots$

بسط مک لورن $\sin z$: $\sin z = z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\dots$

PAPCO

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

«قضیه لوران» (بسط توابع در نقاط غیرتحلیلی):

فرض کنیم $f(z)$ در نقطه z_0 غیرتحلیلی باشد و دو دایره C_1 و C_2 به مرکز z_0 موجود باشند به طوری که $f(z)$ در نقاط داخل آن دایره تحلیلی باشد. در اینصورت برای نقاط بین دو دایره داریم:

بسط لوران:

قسمت اصلی بسط لوران

$$f(z) = \cdots + \frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

ضرایب آن:

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

* همواره لوران را به کمک مکلورن و تیلور محاسبه می‌کنیم

Subject:
Year. ۸۵ Mouth. ۳ Date. ۲

مثال: (مثال شماره ۵)

بسط لوران $f(z) = \frac{\sin(2z)}{z^2}$ را بیابید.

تابع فوق فقط در نقطه ۰ غیرتحلیلی است و در بسط لوران می‌توانیم بسط را در چه نقطه‌ای بیابیم زیرا جایی بسط فوق را فقط در نقاط غیرتحلیلی بنویسیم.

حل:

چون نقطه غیرتحلیلی $z=0$ است لذا بسط لوران از روی بسط مکلورن بدست می‌آید یعنی شکل را ابتدا مکلورن $\sin z$ را می‌نویسیم سپس به جای z مقدار $2z$ قرار می‌دهیم و بر z^2 تقسیم می‌کنیم:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} \dots$$

$$\rightarrow \sin(2z) = 2z - \frac{8z^3}{6} + \frac{32}{120} z^5 \dots$$

$$\div z^2 \rightarrow \frac{\sin(2z)}{z^2} = \frac{\overset{c_{-1}}{2}}{z} - \overset{c_1}{\frac{8}{6}} z + \overset{c_3}{\frac{32}{120}} z^3 - \dots$$ بسط لوران

مهم‌ترین چیز در بسط لوران، ضرائب هستند.

PAPCO

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

حل:

مثال: بسط لوران $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ را بیابید (شماره ۲)

چون نقطه‌ی غیر تحلیلی $z=0$ است ابتدا بسط مک لورن $\sin z$ را بدست می‌آوریم

بجای z مقدار $\frac{1}{z}$ قرار می‌دهیم در z^2 ضرب می‌کنیم:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots$$

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120 z^5} - \cdots$$

$$\rightarrow f(z) = z + \frac{-1/6}{z} + \frac{1/120}{z^3} - \cdots$$ بسط لوران

($-\frac{1}{6} \rightarrow c_{-1}$ ، $\frac{1}{120} \rightarrow c_{-3}$)

Subject:
Year ۸۵ Month. ۳ Date. ۲ ( )

مثال شماره ③ :

بسط لوران $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)}$ را در نقطه $z=1$ بیابید / لوران
(تیلور ج ... مد لور)

چون نقطه $z=1$ غیر تحلیلی است و تابع $g(z)=\frac{1}{z+2}$ در این نقطه تحلیلی است لذا

بسط تیلور $g(z)$ در این نقطه را بدست می‌آوریم و بر $z-1$ تقسیم می‌کنیم :

$$g(z) = \frac{1}{z+2} \rightarrow g(1) = \frac{1}{3}$$

$$g'(z) = \frac{-1}{(z+2)^2} \rightarrow g'(1) = \frac{-1}{9}$$

$$g''(z) = \frac{-2}{(z+2)^3} \rightarrow g''(1) = \frac{-2}{27}$$

$$g(z) = g(1) + \frac{g'(1)}{1!}(z-1) + \frac{g''(1)}{2!}(z-1)^2 + \cdots$$

$$\rightarrow \frac{1}{z+2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(z-1) + \frac{1}{27}(z-1)^2 + \cdots \quad \div \frac{1}{z-1}$$

$$\rightarrow f(z) = \frac{\frac{1}{3}}{z-1} \left(-\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{27}\right)(z-1) + \cdots$$

(c_{-1} ، c_0 ، c_1) بسط لوران

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject.
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۲۰

تعریف ماندہ:

فرض کنیم $f(z)$ در نقطه‌ی z_0 غیرتحلیلی باشد. ضریب c_{-1} در بسط لوران تابع در نقطه‌ی z_0 را ماندہ‌ی تابع f در z_0 می‌نامیم و با نماد $\underset{z=z_0}{Res}(f(z))$ نشان می‌دهیم.

① مثال: $\underset{z=0}{Res}\left(\frac{\sin(2z)}{z^2}\right) = 2$

نقطه‌ی غیرتحلیلی

② مثال: $\underset{z=0}{Res}\left(z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{-1}{6}$

③ مثال: $\underset{z=1}{Res}\left(\frac{1}{(z-1)(z+2)}\right) = \frac{1}{3}$

دفتر فنی ایلیا
۳۳۶۹۸۷۲۱
۴۵ متری ده حقی پاساژ دانشجو پلاک ۵

PAPCO

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۲

تعریف قطب مرتبهٔ m ام:

فرض کنیم $f(z)$ در نقطهٔ z_0 غیر تحلیلی باشد. نقطهٔ z_0 را قطب مرتبهٔ m ام $f(z)$ می‌نامیم، هرگاه بسط لوران آن بصورت زیر باشد:

$$f(z) = \underbrace{\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0}}_{\text{قسمت اصلی}} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots$$

در مثال ① ← $z=0$ قطب مرتبهٔ اول است.

در مثال ② ← $z=0$ قطب مرتبهٔ بی‌نهایت است.

در مثال ③ ← $z=1$ قطب مرتبهٔ اول است.

PAPCO

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

۱) راههای تحلیلی محاسبهٔ مانده: روشهایی هستند که به علت آنکه نیاز به تحلیل بسط لوران نداریم می‌توان مانده را محاسبه کرد.

روش اول: روش $\frac{p}{q}$

فرض کنیم $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ که در آن $p(z)$ و $q(z)$ توابعی تحلیلی هستند و

$q(z_0)=0$ ولی $q'(z_0)\neq 0$ در اینصورت:

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}\big(f(z)\big)=\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

مثال:

$$\operatorname*{Res}_{z=2i}\left(\frac{z+1}{z^2+4}\right)=?$$

($p(z)=z+1$، $q(z)=z^2+4$)

$$?=\left.\frac{z+1}{2z}\right|_{z=2i}=\frac{2i+1}{4i}$$

مثال: * هرچیزی به غیر از عبارت $q(z_0)=0$ را به صورت p در میاوریم

$$\operatorname*{Res}_{z=-3}\left(\frac{z+2}{(z-1)(z+3)}\right)=?$$

$$?=\operatorname*{Res}_{z=-3}\left(\frac{\frac{z+2}{z-1}}{z+3}\right)=\left.\frac{\frac{z+2}{z-1}}{1}\right|_{z=-3}=\frac{-3+2}{-3-1}=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$$

($p=\frac{z+2}{z-1}$)

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

مثال: $q(z_0)=0$ هر چیز غیر از ۰ به صورت می آید

$$? = \underset{z=\frac{1}{2}}{Res}\left(\frac{z^2+1}{(2z-1)(z-1)^5(z^3+4)^2}\right) = ?$$

$$? = \underset{z=\frac{1}{2}}{Res}\left(\frac{\frac{z^2+1}{(z-1)^5(z^3+4)^2}}{2z-1}\right) = \left.\frac{\frac{z^2+1}{(z-1)^5(z^3+4)^2}}{2}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{4}}{(-\frac{1}{2})^5(\frac{33}{8})^2 \cdot 2}$$

(صورت: p ، مخرج: q)

روش دوم: تکنیک m:

فرض کنیم z_0 قطب مرتبه m ام تابع $f(z)$ باشد در اینصورت:

$$\underset{z=z_0}{Res}(f(z)) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}$$

($(m-1)$: مرتبه مشتق)

تذکر ①: توان $z-z_0$ در مخرج کسر مرتبه قطب می باشد مشروط بر اینکه نقطه z_0 غیر عادی صورت را صفر نکند.

تذکر ②: چنانچه $m=1$ باشد آنگاه از هر دو روش می توان مانده را حساب نمود که در این مورد روش $\frac{p}{q}$ بهتر می باشد ولی چنانچه $m>1$ باشد الزاماً باید از تکنیک m مانده را محاسبه نمود.

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۹ ( )

۱۴۳

EX. $\underset{z=0}{\text{Res}} \left(\dfrac{e^{3z}}{z^{3}} \right) = ?$

چون $z=0$ صورت کسر را صفر نمی‌کند ← مرتبه قطب $m=3$ ← $m>1$ روش m

$? = \dfrac{1}{(3-1)!} \lim\limits_{z\to 0} \left[z^{3} \dfrac{e^{3z}}{z^{3}} \right]'' = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{z\to 0} \left[9e^{3z} \right] = \dfrac{9}{2}$

EX. $\underset{z=1}{\text{Res}} \left(\dfrac{z+3}{(z-1)^{2}(z+2)} \right) = ?$

مرتبه قطب: $m=2$

چون $m>1$ است از روش و تکنیک m می‌رویم

$? = \dfrac{1}{(2-1)!} \lim\limits_{z\to 1} \left[(z-1)^{2} \dfrac{z+3}{(z-1)^{2}(z+2)} \right]' =$

$= \lim\limits_{z\to 1} \left[\dfrac{(z+2)-(z+3)}{(z+2)^{2}} \right] = -\dfrac{1}{9}$

PAPCO

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۹

۱۵۷

EX $\underset{z=-2}{\text{Res}}\left(\dfrac{z+3}{(z-1)^2(z+2)^{(1)}}\right) = ?$

هر چیزی به غیر از $q(z)=0$ را به صورت کسری ببریم.

$m=1$ ← بهتر است از روش $\frac{p}{q}$ ببریم

$$\underset{z=-2}{\text{Res}}\left(\frac{\frac{z+3}{(z-1)^2} \rightarrow p}{(z+2) \rightarrow q}\right) = \left.\frac{\frac{z+3}{(z-1)^2}}{1}\right|_{z=-2} = \frac{1}{9}$$

مثال:

مرتبه قطب $z=0$ را برای تابع $f(z)=\frac{\sin z}{z^7}$ را بیابید.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots$$

$$\frac{\sin z}{z^7} = \frac{(1)}{z^6} - \frac{1}{6z^4} + \frac{1}{120z^2} - \cdots$$

(c_{-6}) — قسمت اصلی

بسط لوران تابع $f(z)$

← چون $z=0$ غیرتحلیلی است.

$z=0$ قطب مرتبه‌ی ششم است.

راه حل سریع:

$$\frac{\sin z}{z^7} \approx \frac{z}{z^7} = \frac{1}{z^6}$$

EX. $\dfrac{1-\cos z}{z^4} \approx \dfrac{\frac{z^2}{2}}{z^4} = \dfrac{1}{2z^2}$

$z=0$ قطب مرتبه‌ی دوم است.

PAPCO

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

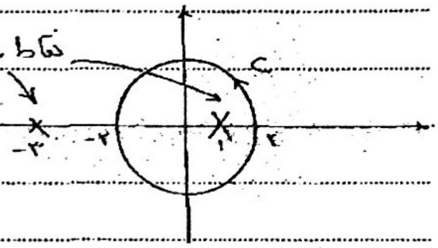
«قضیه مانده‌ها»:

فرض کنید $f(z)$ در نقاط z_1، z_2، ... و z_n داخل منحنی بسته C،

غیرتحلیلی باشد در اینصورت:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=z_1}(f(z)) + \operatorname*{Res}_{z=z_2}(f(z)) + \dots + \operatorname*{Res}_{z=z_n}(f(z))\right]$$

EX. $$\oint_{|z|=2} \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+3)}\,dz$$



قضیه فقط برای نقاط داخل منحنی بسته C صادق است:

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\left(\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+3)}\right) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2\frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+3)}\right]'$$

$m=2 \ (m>1)$ ← یکی از روش‌های m مرتبه

$$\lim_{z\to 1}\frac{2z(z+3)-(z^2+1)}{(z+3)^2} = \lim_{z\to 1}\frac{z^2+6z-1}{(z+3)^2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

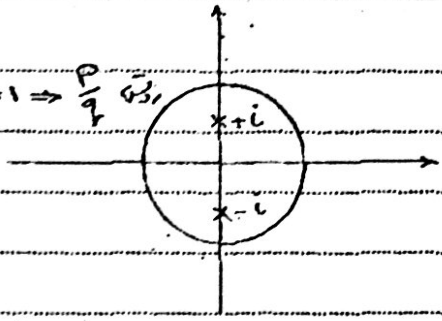
$$I = 2\pi i \times \frac{3}{8} = \frac{3\pi i}{4}$$

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۹/۱

Ex. $\oint_{|z|=2} \frac{z+2}{(z^2+1)} dz$

$(z^2+1) \Rightarrow (z-i)(z+i) \Rightarrow m=1 \Rightarrow \frac{p}{q}$ روش



$z^2+1=0 \Rightarrow z=\pm i$ نقاط غیر تحلیلی

$$\underset{z=i}{\text{Res}}\left(\frac{z+2}{z^2+1}\right) = \frac{z+2}{2z}\Big|_{z=i} = \frac{i+2}{2i}$$

($z+2 \to p$, $z^2+1 \to q$)

$$\underset{z=-i}{\text{Res}}\left(\frac{z+2}{z^2+1}\right) = \frac{z+2}{2z}\Big|_{z=-i} = \frac{-i+2}{-2i}$$

($z+2 \to p$, $z^2+1 \to q$)

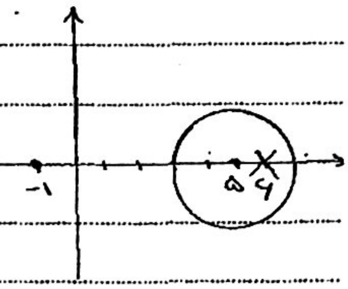
$$I = 2\pi i\left(\frac{i+2}{2i} + \frac{i-2}{2i}\right) = 2\pi i\left(\frac{2i}{2i}\right) = 2\pi i$$

* هیچگاه نقاط را روی دایره نمی دهند

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

EX. $\oint_{|z-5|=2} \frac{Ln(z+1)}{z-4}\, dz = ?$

ما اصلاً ln (کوچک) نداریم چون اصلاً تابع نیست، فقط Ln (بزرگ) داریم.



معمولاً خط شاخه‌ای به داخل دایره نمی‌رود.

هم باید نقاط غیرتحلیلی را یافت و هم خط شاخه‌ای Ln را می‌یابیم.

$$Ln(z+1) = Ln(x+iy+1) = Ln\big(\underbrace{(x+1)}_{\le 0} + \underbrace{iy}_{=0}\big) \Rightarrow \begin{cases} x+1\le 0 \to x\le -1 \\ y=0 \end{cases}$$

برای نقاط غیرتحلیلی است.

$$\underset{z=4}{Res}\left(\frac{\overset{P}{Ln(z+1)}}{\underset{q}{z-4}}\right) = \frac{Ln(z+1)}{1}\Bigg|_{z=4} = ln(5)$$

در اعداد حقیقی ln کوچک داریم ولی در $z \in \mathbb{C}$ (مختلط) Ln بزرگ داریم.

$? = 2\pi i \ln 5$

Subject:
Year ۸۵ Month. ۳ Date. ۹ ( )

سؤال مهم درسی امتحانی:

$$EX \oint_{|z|=1} \left(z^3\cos z + \frac{z^2+1}{z^2-2z} + \bar{z} + z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right)\right) dz = ?$$

قضیه کوشی - گورسا

$$? = \oint_{|z|=1} z^3\cos z\, dz + \oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z(z-2)}\, dz + \oint_{|z|=1} \bar{z}\, dz + \oint_{|z|=1} z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

تحلیلی تحلیلی → تحلیلی → I_1 ، I_2 ، I_3 ، I_4

چون تابع $\bar{z}$ همه جا غیر تحلیلی است باید پارامتری بنویسیم.

$I_1 = 0$ طبق قضیه کوشی - گورسا

$$I_2 = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{z^2+1}{z(z-2)}\right) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \left(\frac{\frac{z^2+1}{z-2}}{z}\right) =$$

$z=0$ نقطه داخل دایره

$z=2$ داخل دایره نیست

$m=1$ (روش $\frac{p}{q}$)

$$= 2\pi i \left.\frac{\frac{z^2+1}{z-2}}{1}\right|_{z=0} = -\pi i$$

$$I_3 = \oint_{|z|=1} \bar{z}\, dz \Rightarrow \begin{cases} z = e^{it} \\ dz = ie^{it}dt \\ \bar{z} = e^{-it} \end{cases} = \int_0^{2\pi} (e^{-it})(ie^{it}dt) = 2\pi i$$

ادامه ←

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۹۱

ادامهٔ حل:

$$I_4 = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0}\left(z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right)\right) = 2\pi i \times \frac{1}{24} = \frac{\pi i}{12}$$

چون فرمول‌های باقی Res کسری بودند و در اینجا کسر نداریم باید لوران بزنیم

چون $z=0$ نقطهٔ غیر تحلیلی است لوران می‌زنیم:

بسط مک لورن $\cos z$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots$$

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{24z^4} - \dots$$

$$z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) = z^3 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{24z} - \dots \quad (\to c_{-1})$$

$$I_{کل} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 - \pi i + 2\pi i + \frac{\pi i}{12} = \frac{13\pi i}{12}$$

PAPCO

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year ۸۵ Month. ۳ Date. ۹ ( )

« کاربردهای انتگرال گیری از توابع مختلط »

کاربرد اول:

محاسبهٔ انتگرال‌های به فرم: $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$

* روش فوق برای توابع مثلثاتی است که محدودهٔ انتگرال معین ۰ تا ۲π یا ۰ تا π باشد.

با تغییر متغیر $z = e^{i\theta}$ داریم: ($r = 1$)

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

$$dz = i e^{i\theta} d\theta = iz\, d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

حال با جاگذاری روابط فوق داریم:

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \oint_{|z|=1} f\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{dz}{iz}}$$

$|z|=1$ ← دایره‌ای به شعاع ۱

PAPCO

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۴ Date. ۹ ( )

EX. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{3+\cos\theta}\, d\theta = ?$

انتگرال های فوق را به صورت مختلط در آورده و سپس انتگرال های مختلط را طبق نکات گفته شده حل می کنیم:

$$? = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^2+1}{2z}}{3+\frac{z^2+1}{2z}}\, \frac{dz}{iz}$$

هموار

$$= \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^2+1}{2z}}{\frac{z^2+6z+1}{2z}}\, \frac{dz}{iz}$$

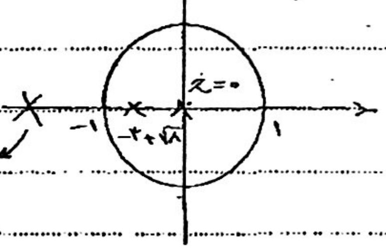
$$= \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z^2+1}{(z^2+6z+1)z}\, dz$$

هموار دایره ای به شعاع ۱!

حال نقاط غیر تحلیلی را می یابیم و عبارتند از: $z=0$

$$z^2+6z+1=0 \longrightarrow z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-1}}{1} \Rightarrow \begin{cases} z=-3+\sqrt{8} \\ z=-3-\sqrt{8} \end{cases}$$

$-3-\sqrt{8}$ چون بیرون دایره است



PAPCO

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۹

ادامه حل:

$$\underset{z=0}{\mathrm{Res}}\left(\frac{z^{2}+1}{z(z^{2}+4z+1)}\right)=\left.\frac{\frac{z^{2}+1}{z^{2}+4z+1}}{1}\right|_{z=0}=1$$

$\left(\frac{p}{q}\right.$ (از روش) $m=1$

$$\underset{z=-3+\sqrt{8}}{\mathrm{Res}}\left(\frac{z^{2}+1}{z(z^{2}+4z+1)}\right)=\left.\frac{\frac{z^{2}+1}{z}}{2z+4}\right|_{z=-3+\sqrt{8}}=$$

$$=\frac{\frac{(-3+\sqrt{8})^{2}+1}{-3+\sqrt{8}}}{2\sqrt{8}}=\frac{18-6\sqrt{8}}{16-6\sqrt{8}}=\frac{9-3\sqrt{8}}{8-3\sqrt{8}}$$

$$I=\frac{1}{i}\times 2\pi i\left(1+\frac{9-3\sqrt{8}}{8-3\sqrt{8}}\right)=\frac{2\pi(17-6\sqrt{8})}{8-3\sqrt{8}}$$

($\frac{1}{i}$: طبق انتگرال)

PAPCO

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۹

EX. $\int_0^{\pi} \frac{\cos(2\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}\, d\theta = ?$ $\quad 0<a<1$

هرگاه بازه گردش θ را ۰ تا π دادند ما گردش θ را ۰ تا 2π می‌گیریم و یک $\frac{1}{2}$ در آن ضرب می‌کنیم:

$$? = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2}\, d\theta$$

این جا ما در صورت $\cos 2\theta$ داریم نه $\cos\theta$:

$$\cos(2\theta) = \frac{e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}}{2} = \frac{z^2+\frac{1}{z^2}}{2} = \frac{z^4+1}{2z^2}$$

$$? = \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^4+1}{2z^2}}{1-2a\,\frac{z^2+1}{2z}+a^2} \times \frac{dz}{iz} \to d\theta$$

$|z|=1$ ← جهت مثبت، دور ۱

$$= \frac{1}{4}\oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^4+1}{2z^2 z}}{\frac{2z-2az^2-2a+2a^2z}{2z}}\,\frac{dz}{iz}$$

فاکتور از $\ominus$

$$= -\frac{1}{4i}\oint_{|z|=1} \frac{z^4+1}{z^2\left(az^2-(1+a^2)z+a\right)}\, dz$$

ادامه در صفحه ←

PAPCO

دفتر فنی ایلیا ۶۶۹۸۷۲۱ ۲۵ متری ده متری پاساژ دانشجو پلاک ۵

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۹

ادامهٔ حل —

$z=a$

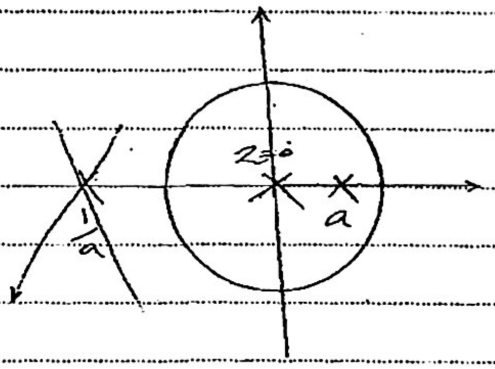
حال نقاط غیر تحلیلی را می‌یابیم:

$$az^2-(1+a^2)z+a=0 \longrightarrow \frac{1+a^2\pm\sqrt{(1+a^2)^2-4a^2}}{2a}$$

چون $0<a<1$

$$\longrightarrow z=\frac{1+a^2\pm\sqrt{(1-a^2)^2}}{2a}=\frac{1+a^2\pm(1-a^2)}{2a}\Rightarrow \begin{cases} z=\frac{1}{a}\Rightarrow \frac{1}{a}>1 \\ z=a \Rightarrow 0<a<1 \end{cases}$$

داخل دایره است



دفتر فنی ایلیا
۳۳۶۹۸۷۲۱
مرکز ده حق پاسخ دانشجویان

چون $0<a<1$ است یکبار $z=0$ و یکبار $z=a$ می‌گیریم و داریم:

$$\underset{z=0}{Res}\left(\frac{z^4+1}{z^2(az^2-(1+a^2)z+a)}\right)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\left[\cancel{z^2}\frac{z^4+1}{\cancel{z^2}(az^2-(1+a^2)z+a)}\right]'$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{4z^3(az^2-(1+a^2)z+a)-(2az-(1+a^2))(z^4+1)}{(az^2-(1+a^2)z+a)^2}=\frac{a^2+1}{a^2}$$

$$\underset{z=a}{Res}\left(\frac{\frac{z^4+1}{z^2}}{az^2-(1+a^2)z+a}\right)=\left.\frac{\frac{z^4+1}{z^2}}{2az-(1+a^2)}\right|_{z=a}$$

($p \leftarrow \frac{z^4+1}{z^2}$، $q \leftarrow az^2-(1+a^2)z+a$)

ادامهٔ حل ←

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject.
Year. Month. Date. ( )

ادامه حل ←

$$= \frac{\frac{a^4+1}{a^2}}{a^2-1} = \frac{a^4+1}{a^2(a^2-1)}$$

$$I = -\frac{1}{4i} \times 2\pi i \left(\frac{a^2+1}{a^2} + \frac{a^4+1}{a^2(a^2-1)} \right)$$

* ضریب انتگرال است

PAPCO

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۱۲ ( )

نگاشت ها :

۱- نگاشت انتقال ($w = z + a$) ؛ a عدد مختلط

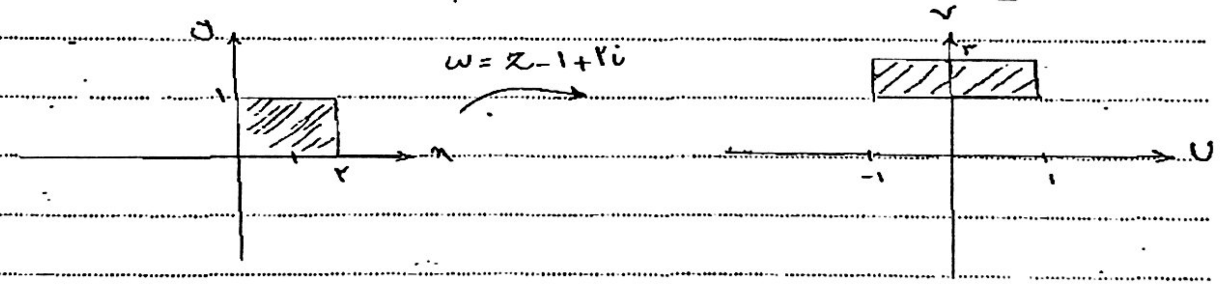
$$w = z + a = x + iy + a_1 + ia_2$$

$$= \underbrace{(x + a_1)}_{u} + i\underbrace{(y + a_2)}_{v}$$

تحت نگاشت انتقال، ناحیه داده شده به اندازه a_1 واحد در جهت محور x ها و a_2 واحد در جهت محور y ها منتقل می شود. (شکل را عوض نمی کند و فقط شکل را نگاشت انتقال، منتقل می کند)

مثال:

تصویر ناحیه زیر را تحت نگاشت $w = z - 1 + 2i$ بیابید.



(۱-) واحد در جهت x ها و (۲+) واحد در جهت y ها منتقل می شود.

PAPCO

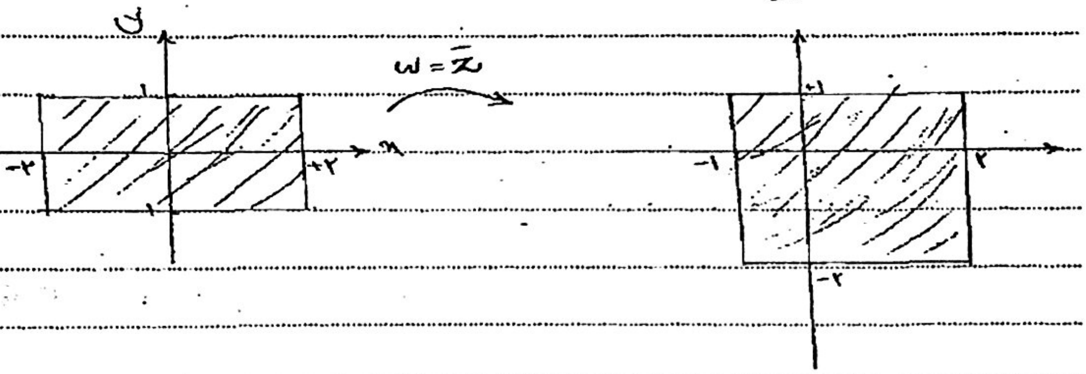
WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

۲- نگاشت مزدوج ($w=\bar{z}$):

$w = \bar{z} = x + i(-y) \Rightarrow \begin{cases} u = x \\ v = -y \end{cases}$

نگاشت مزدوج ناحیه داده شده را نسبت به محور x قرینه می‌سازد.

مثال: تصویر ناحیه زیر را تحت نگاشت $\bar{z}=w$ بیابید.



Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۱۲ ( )

حل مثال:

تصویر ناحیه $x^2 + (y-1)^2 \le 1$ را تحت نگاشت $w = \bar{z} + 1 - i$ بیابید.

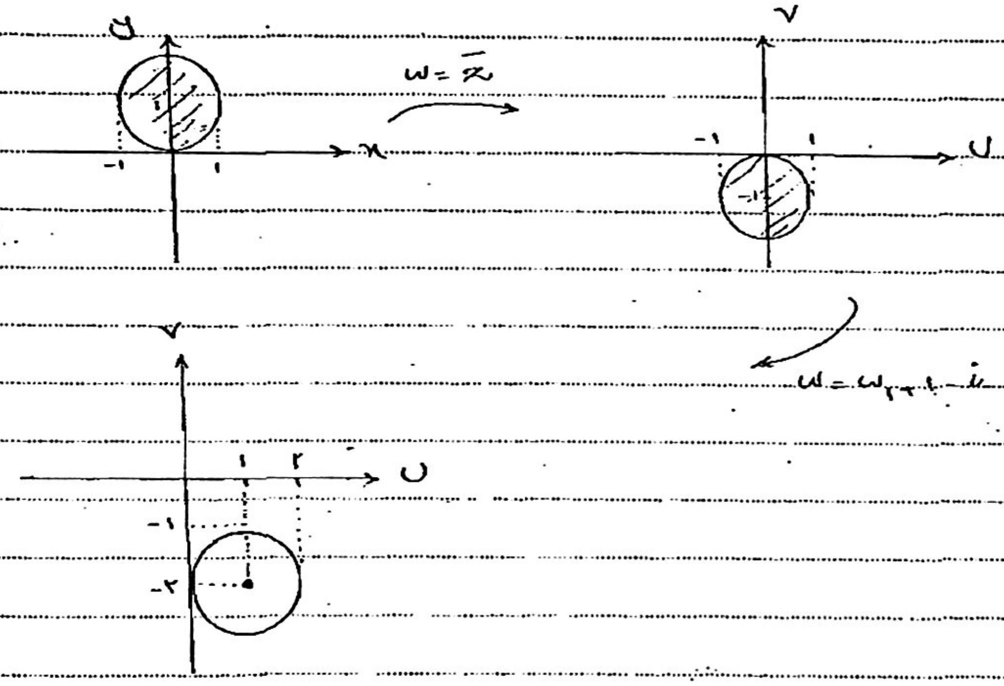
اول مزدوج بعد انتقال

دارای دو نگاشت مزدوج و انتقال هستیم

* حل دوم: $w = \overline{z - 1 + i}$ (اول انتقال بعد مزدوج)

$w_1 = \bar{z}$ مزدوج

$w = w_1 + 1 - i$ ⇒ یک واحد در جهت x و ۱- واحد در جهت y



PAPCO

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

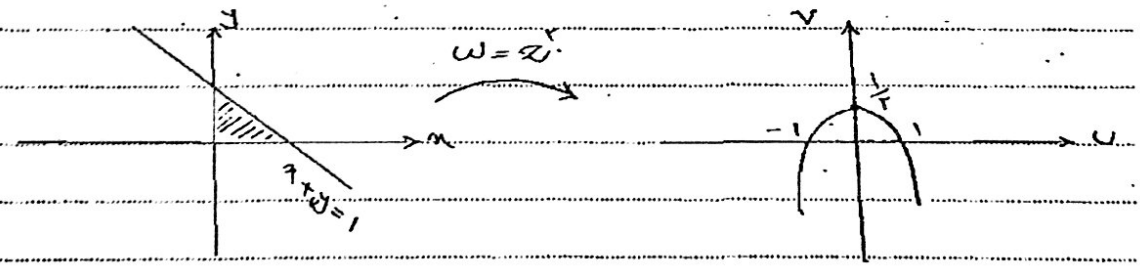
۳- نگاشت توان ($w = z^2$) :

$$w = z^2 = (x+iy)^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u} + i\underbrace{(2xy)}_{v} \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

$$w = (re^{i\theta})^2 = \overset{\rho}{r^2}\, e^{\overset{\varphi}{2\theta}} \Rightarrow \begin{cases} \rho = r^2 \\ \varphi = 2\theta \end{cases}$$

نکته: اگر ناحیه به صورت مثلث، مستطیل و ... بود از فرمول اول می‌رویم و اگر ناحیه زاویه‌دار مثل دایره و ... باشد از فرمول دوم می‌رویم.

مثال: تصویر خط $x+y=1$ را تحت نگاشت $w=z^2$ بیابید.



چون ناحیه کارتزین است، از فرمول اولی می‌رویم:

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \overset{y=1-x}{=} x^2 - (1-x)^2 = 2x - 1 \Rightarrow x = \dfrac{u+1}{2} \\ v = 2xy = 2x(1-x) = 2x - 2x^2 \end{cases}$$

چون u و v برحسب x هستند، x را از بین برده تا بتوانیم رابطه بین u و v را بیابیم:

ادامه حل ←

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

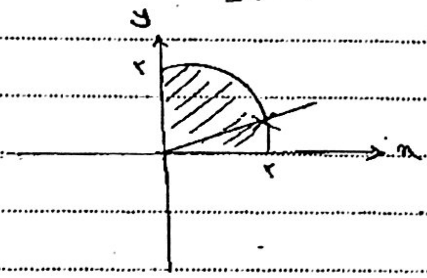
ادامه حل: $v = 2\left(\frac{u+1}{2}\right) - 2\left(\frac{u+1}{2}\right)^2 = u+1-\frac{1}{2}\left(u^2+2u+1\right)$

سهمی: $v = \frac{-u^2+1}{2}$

u	v
0	$\frac{1}{2}$
± 1	0

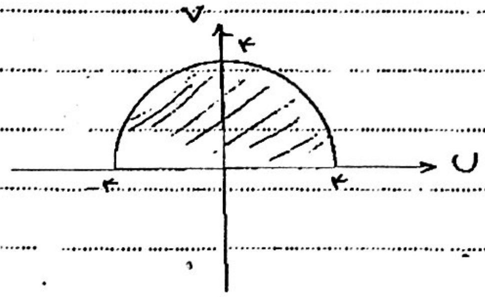
اگر به جای خط ها گفته شد مثلث، آنگاه باید سه خط $x=0$ و $y=0$ و $x+y=1$ را منتقل کرده و سپس سطح مشترک را هاشور می‌زنیم.

مثال: تصویر $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ x,y \ge 0 \end{cases}$ را تحت نگاشت $w=z^2$ بیابید.



$0 \le r \le 2 \rightarrow 0 \le r^2 \le 4 \rightarrow 0 \le \rho \le 4$

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le 2\theta \le \pi \rightarrow 0 \le \varphi \le \pi$



PAPCO

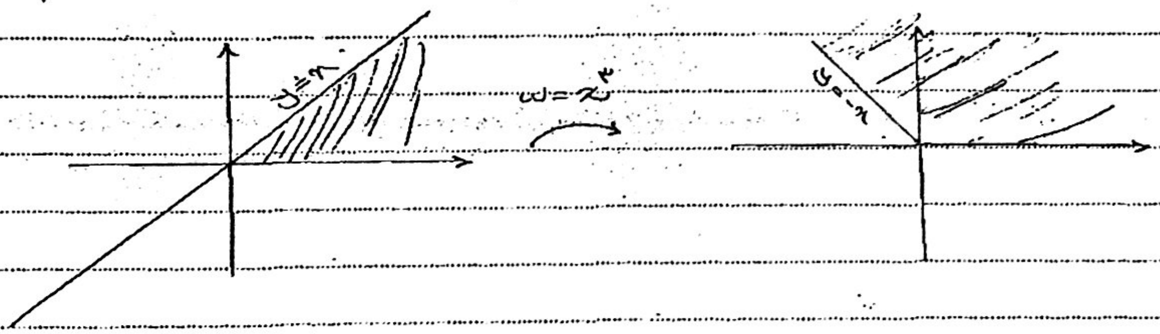
WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

۳- نگاشت $w = z^n$

$$w = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \Rightarrow \begin{cases} \rho = r^n \\ \varphi = n\theta \end{cases}$$

مثال: تصویر ناحیه زیر را تحت نگاشت $w = z^3$ بیابید.

توانهای بیشتر از ۲ را چه ناحیه دکارتی باشد، چه قطبی، از راه قطبی حل می‌نماییم.



$$0 \le r \le \infty \Rightarrow 0 \le r^3 \le \infty \Rightarrow 0 \le \rho \le \infty$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \le 3\theta \le \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}$$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۱۲

۴- نگاشت نمایی ($w = e^z$):

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \Rightarrow \begin{cases} \rho = e^x \\ \varphi = y \end{cases}$$

($e^x \to \rho$ ، $y \to \varphi$)

* تذکر مهم:

در تحلیلی بودن تابع نمایی مختلط را می‌خواستیم از اویلر می‌رفتیم یعنی: $e^{iy} = \cos y + i \sin y$

ولی در نگاشت فوراً ρ و φ را می‌یابیم

* خاصیت نگاشت e^z:

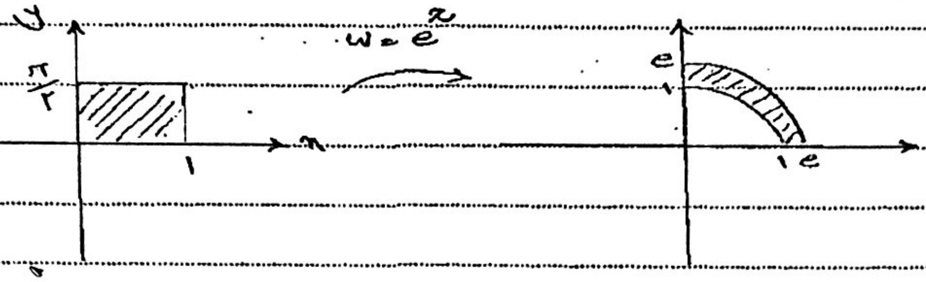
یک ناحیهٔ دکارتی را به ناحیهٔ قطبی تبدیل می‌کند.

مثلاً: یک مستطیل را به یک دایره تبدیل می‌کند.

PAPCO

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

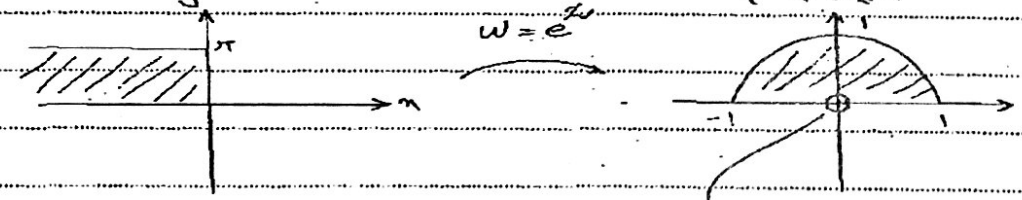
مثال: تصویر ناحیه زیر را تحت نگاشت e^z = w بیابید.



$0 < x < 1 \rightarrow 1 \leq e^x \leq e \rightarrow 1 \leq \rho \leq e$

$0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ربع اول *

مثال: تصویر $\begin{cases} x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$ را تحت نگاشت $w = e^z$ بیابید.



$-\infty < x \leq 0 \rightarrow e^{-\infty} < e^x \leq e^0 \rightarrow 0 < \rho \leq 1$

$0 \leq y \leq \pi \rightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi$ ربع اول و دوم

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

۵- نگاشت $w = \mathrm{Ln}\, z$:

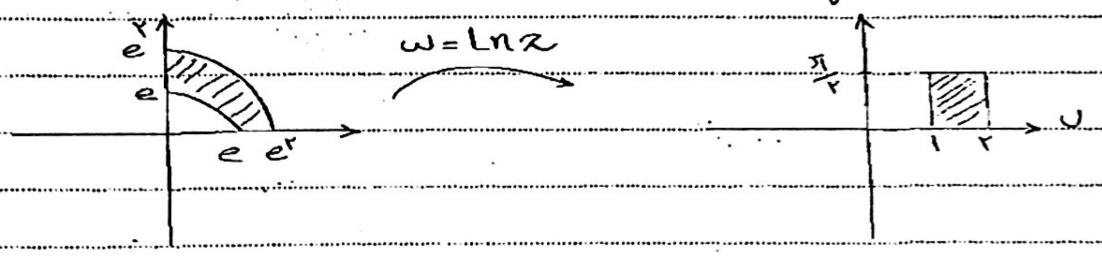
$$w = \mathrm{Ln}(re^{i\theta}) = \underbrace{\ln r}_{u} + i\underbrace{\theta}_{v} \Rightarrow \begin{cases} u = \ln r \\ v = \theta \end{cases}$$

دفتر فنی ایلیا
۳۳۶۹۸۷۲۱
۲۵ متری ده متری پاساژ دانشجو پلاک ۵

خاصیت نگاشت $w = \mathrm{Ln}\, z$:

* ناحیه قطبی را به ناحیه دکارتی می برد.

مثال: تصویر ناحیه زیر را تحت نگاشت $w = \mathrm{Ln}\, z$ بیابید.



$$e \leqslant r \leqslant e^2 \rightarrow 1 \leqslant \ln r \leqslant 2 \Rightarrow 1 \leqslant u \leqslant 2$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۱۲ ( )

۶- تبدیلات دوران ($w = az$) ← عدد مختلط

$\varphi = \theta$ ← همان زاویه اند

$\rho = r = \sqrt{x^2+y^2} = |w|$ ← همان شعاع اند

$\rho = |w| = |az| = |a||z| = r|a|$

تحت تبدیلات دوران، فاصله w تا مبدأ برابر است با فاصله z تا مبدأ ضربدر $|a|$.

چنانچه $|a| < 1$ باشد فاصله w تا مبدأ از فاصله z تا مبدأ کمتر است در این حالت گوییم انقباض صورت گرفته است. (شکل کوچکتر می‌شود)

و چنانچه $|a| > 1$ باشد فاصله w تا مبدأ از فاصله z تا مبدأ بیشتر می‌شود در این حالت گوییم انبساط صورت گرفته است. (شکل بزرگتر می‌شود)

$|a| = 1$ (شکل تغییری نمی‌کند)

$\varphi = \arg(w) = \arg(az) = \arg(a) + \arg(z) = \arg(a) + \theta$

تحت تبدیلات دوران، زاویه‌ای که w با محور xها می‌سازد برابر است با زاویه‌ای که z با محور xها می‌سازد به علاوه $\arg(a)$، یعنی شکل به اندازه $\arg(a)$ دوران پیدا می‌کند.

PAPCO

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

②

Subject:

Year. Month. Date. ( )

۱۷۰

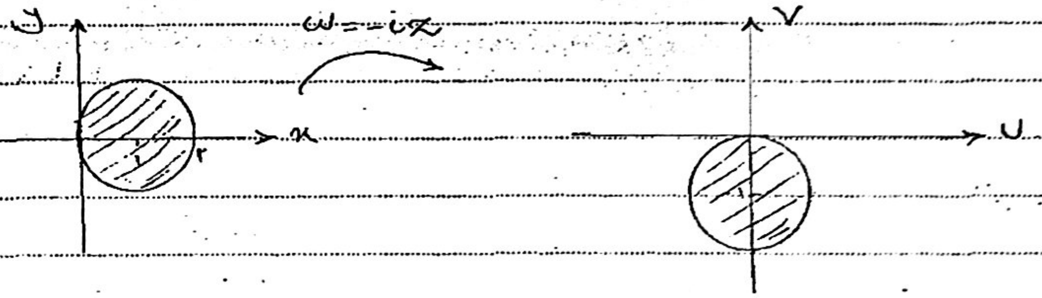
مثال: تصویر $(x-1)^2+y^2 \leq 1$ را تحت نگاشت $\omega = -iz$ بیابید.

* اولین کار یافتن $|a|$ و همچنین $\arg(a)$ است.

$|-i| = \sqrt{(0)^2+(-1)^2} = 1$ ← انبساط داریم نه انقباض

چون $x=0$ و $y<0$ ⇐ $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

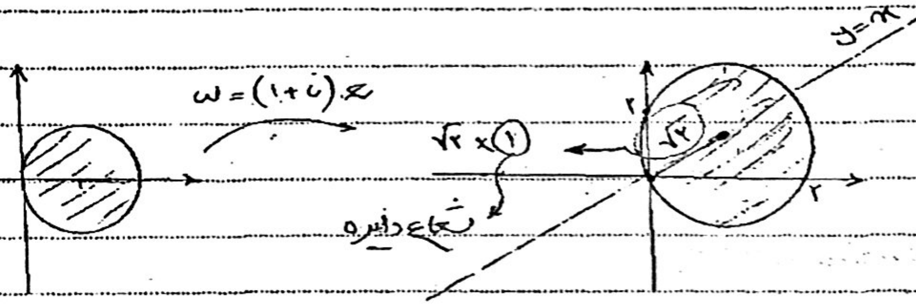
دوران به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در راستای جهت عقربه‌های ساعت



مثال: تصویر $(x-1)^2+y^2 \le 1$ را تحت نگاشت $w=(1+i)z$ بیابید. ($1+i$ ← a)

$|1+i| = \sqrt{2}$ ⇐ انبساط به اندازه $\sqrt{2}$ داریم

$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ ⇐ چون مثبت است در خلاف عقربه‌های ساعت است.



نقاط کلیدی را در خود نگاشت ضرب کنید تا شکل دقیق حاصل آید.

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

۷ـ نگاشت انعکاس ($w=\frac{1}{z}$):

$$w=\frac{1}{z} \Rightarrow z=\frac{1}{w} \Rightarrow x+iy=\frac{1}{u+iv}\times\frac{u-iv}{u-iv}$$

$$\Rightarrow x+iy=\frac{u-iv}{u^2+v^2} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{u}{u^2+v^2} \\ y=\frac{-v}{u^2+v^2} \end{cases}$$ فرم دکارتی:

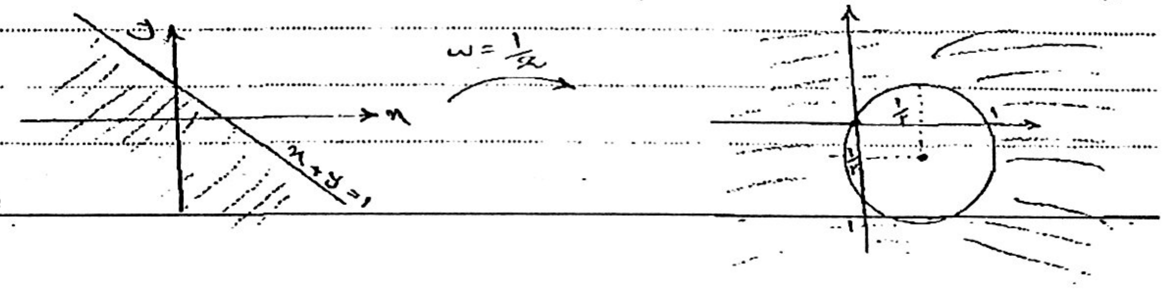
$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{i\theta}}=\frac{1}{r}e^{-i\theta} \Rightarrow \begin{cases} \rho=\frac{1}{r} \\ \varphi=-\theta \end{cases}$$ فرم قطبی:

مثال: تصویر ناحیه $x+y\le1$ را تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ بیابید.
که ناحیه دکارتی است و فرم دکارتی را قرار می‌دهیم.

$$x+y\le1 \to \frac{u}{u^2+v^2}+\frac{-v}{u^2+v^2}\le1 \to u-v\le u^2+v^2$$

$$\to u^2-u+v^2+v\ge0 \xrightarrow{\text{مربع کامل کرده}} \left(u-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ge0$$

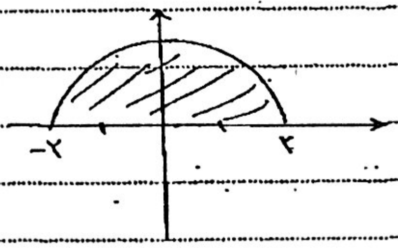
$$\to \left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2\ge\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$: خارج دایره‌ای به مرکز $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ و شعاع $\frac{\sqrt{2}}{2}$



PAPCO

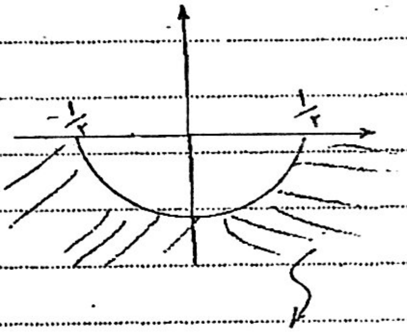
دانشجویان مهندسی پزشکی| WWW.BMESTU.IR

مثال: تصویر $\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ y\ge 0 \end{cases}$ را تحت نگاشت $w=\frac{1}{z}$ بیابید.



$0\le r\le 2 \rightarrow \frac{1}{2}\le \frac{1}{r}<\infty \rightarrow \frac{1}{2}\le \rho<\infty$

$0\le \theta\le \pi \rightarrow -\pi\le -\theta\le 0 \rightarrow -\pi\le \varphi\le 0$ ربع سوم و چهارم



خارج دایره ای به شعاع $\frac{1}{2}$

PAPCO

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۱۲

۸- نگاشت $w = \sin z$:

$w = \sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos(iy) + \cos x \sin(iy)$

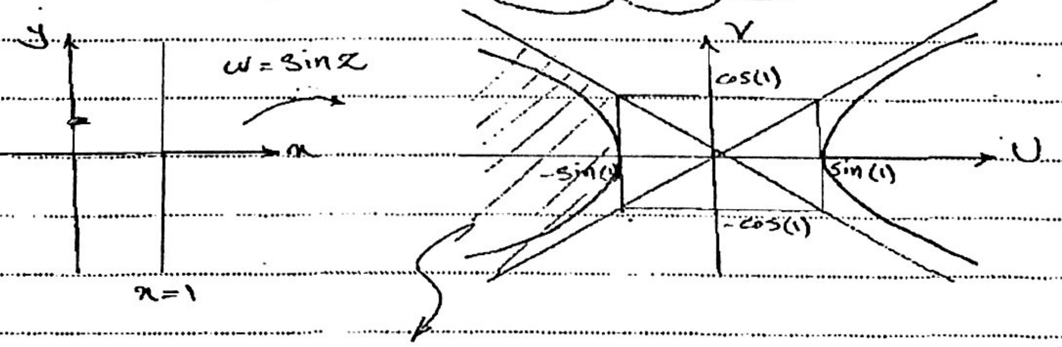
$= \underbrace{\sin x \cosh y}_{u} + i \underbrace{\cos x \sinh y}_{v} \rightarrow \begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \end{cases}$

مثال: تصویر خط $x = 1$ را تحت نگاشت $w = \sin z$ را بیابید.

$\begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \end{cases} \xrightarrow{x=1} \begin{cases} u = \sin(1) \cosh y \\ v = \cos(1) \sinh y \end{cases} \rightarrow$

حال، حتی ما رابطه‌ای بین u و v را می‌خواهیم داریم:

$\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1 \rightarrow \frac{u^2}{\sin^2(1)} - \frac{v^2}{\cos^2(1)} = 1$ هذلولی



چون $u = \sin(1)\cosh y \geq \sin(1)$

همواره $\cosh(y)$ بزرگتر مساوی یک است.

Subject.
Year. Month. Date. ( )

تذکرات مهم:

مثال ۴ حل شده کلاس ۴ از کتاب حتماً خوانده شود.

حتماً نکات: sinc ای در امتحان می‌آید مخصوصاً یک مسئله صفحه ۱۳۱ و صفحه ۱۳۳ کتاب

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

«نگاشت های مثلثاتی»

آنچه داشتیم:

$w = \cos z = \sin(z + \frac{\pi}{2}) \rightarrow \begin{cases} w_1 = z + \frac{\pi}{2} & \text{انتقال} \\ w = \sin(w_1) & \text{سینوسی} \end{cases}$

$w = \cosh z = \cos(iz) = \sin(iz + \frac{\pi}{2}) \rightarrow \begin{cases} w_1 = iz & \text{دوران } \odot \\ w_2 = w_1 + \frac{\pi}{2} & \text{انتقال} \\ w = \sin(w_2) & \text{سینوسی} \end{cases}$

$w = \sinh z = -i\sin(iz) \quad \begin{cases} w_1 = iz & \text{دوران } \odot \\ w_2 = \sin(w_1) & \text{سینوسی} \\ w = -iw_2 & \text{دوران } \odot \end{cases}$

$w = \sin(\ln z) \rightarrow \begin{cases} w_1 = \ln z \\ w = \sin(w_1) \end{cases}$ ⟹ مثالش در صفحه ۱۳۲ کتاب آمده

$w = \frac{1}{z^2+1} \rightarrow \begin{cases} w_1 = z^2 & \text{توان } \odot \\ w_2 = w_1 + 1 & \text{انتقال} \\ w = \frac{1}{w_2} & \text{انعکاس} \end{cases}$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

مهم ترین نگاشت ترکیبی:

نگاشت موبیوس: $w = \frac{az+b}{cz+d}$ و $a, b, c, d \in \mathbb{C}$

در نگاشت موبیوس مراحل زیر را انجام می دهیم:

۱- از ضریب z در صورت و z در مخرج فاکتور می گیریم

۲- مخرج را در صورت تولید می کنیم

۳- تفکیک صورت در مخرج انجام می دهیم

۴- ضریبی که در ابتدا فاکتور گرفته بودیم را ضرب می نماییم

مراحل به فرم ریاضی:

$$1: \; W = \frac{a}{c}\,\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}$$

$$2: \; = \frac{a}{c}\,\frac{\left(z+\frac{d}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)}{z+\frac{d}{c}}$$

$$3: \; = \frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}\right)$$

ادامه ←

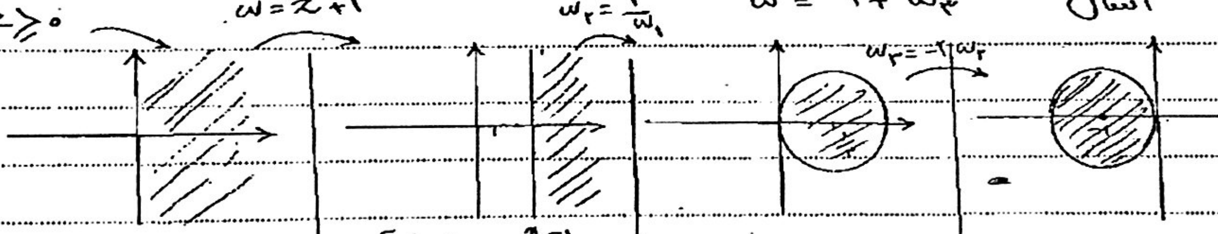
WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

(۴): $= \underbrace{\frac{a}{c}}_{A} + \frac{\overbrace{\frac{a}{c}\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)}^{B}}{z + \underbrace{\frac{d}{c}}_{C}}$

$$w = A + \frac{B}{z+C} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = z + C & \text{انتقال} \\ w_2 = \frac{1}{w_1} & \text{انعکاس} \\ w_3 = B w_2 & \text{دوران} \odot \\ w = A + w_3 & \text{انتقال} \end{cases}$$

مثال: تصویر $Re(z) \geq 0$ را تحت نگاشت $w = \frac{z-1}{z+1}$ را بیابید.

$$w = \frac{(z+1)-2}{z+1} = 1 + \frac{-2}{z+1} \rightarrow \begin{cases} w_1 = z+1 & \text{انتقال} \\ w_2 = \frac{1}{w_1} & \text{انعکاس} \\ w_3 = -2 w_2 & \text{دوران} \odot \\ w = 1 + w_3 & \text{انتقال} \end{cases}$$



انعکاس را ببر

$x \geq 1 \rightarrow \frac{u}{u^2+v^2} \geq 1$

$u^2 - u + v^2 \leq 0$

$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 \leq \frac{1}{4}$

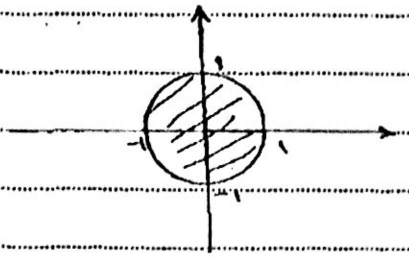
$|-2| = 2$

$arg(-2) = \pi + \arctan(0) = \pi$

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

ادامه حل:

$\omega = 1 + \omega_3$



PAPCO

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۱۲ / ۱

نگاشت سه نقطه:

نگاشتی که سه نقطه z_1 و z_2 و z_3 را به ترتیب به روی w_1 و w_2 و w_3 ببرد

دو خطی است و از رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\times\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\times\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

مثال: نگاشتی را بیابید که سه نقطه 0 (z_1) و 1 (z_2) و i (z_3) را به ترتیب بر روی -1 (w_1)، ∞ (w_2)، 0 (w_3)

ببرد.

* حتماً حتماً جای ترتیب رعایت شود و حال در فرمول قرار می دهیم:

$$\frac{w+1}{w-0}\times\frac{\infty-0}{\infty+1}=\frac{z-0}{z-i}\times\frac{1-i}{1-0}$$

اگر $\frac{\infty}{\infty}$ شد صورت و مخرج را با هم ساده می کنیم زیرا:

$$\frac{\infty-0}{\infty+1}=\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}+1}=\frac{1}{t+1}=1$$

$$\frac{w+1}{w}=\frac{z-iz}{z-i}\Rightarrow 1+\frac{1}{w}=\frac{z-iz}{z-i}\Rightarrow\frac{1}{w}=\frac{z-iz-z+i}{z-i}$$

$$\frac{1}{w}=\frac{-iz+1}{z-i}\Rightarrow w=\frac{z-i}{-iz+i}\Rightarrow$$ حتماً باید تست کنیم یعنی

z_1 و z_2 و z_3 را قرار داده تا w_1 و w_2 و w_3 بدست آید.

نگاشت موبیوس.

PAPCO

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۱۴/۱

۲. کاربرد دوم: محاسبهٔ برخی انتگرال‌های خاص:

برای محاسبهٔ انتگرال‌هایی به فرم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\alpha x)\,dx$$

دفتر فنی ایلیا
۳۳۶۹۸۷۲۱
۲۵ متری به حقی پاساژ دانشجو پلاک ۵

می‌توان از مانده‌ها استفاده کرد، مشروط بر اینکه:

۱. $f(x)$ تابعی گویا باشد (کسری باشد و صورت و مخرج چندجمله‌ای‌ها باشند)

۲. مخرج $f(x)$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد

۳. درجهٔ مخرج، حداقل دو واحد از درجهٔ صورت بیشتر باشد.

در این صورت برای حل انتگرال‌های فوق از فرمول‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \mathrm{Res}(f(z))$$

(نقاط غیرتحلیلی در نیم صفحهٔ فوقانی ($y>0$))

Subject:
Year ۸۵ Month. ۳ Date. ۱۹ ( )

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx = \mathrm{Re}\left\{ 2\pi i \sum \mathrm{Res}\left(f(z)e^{i\alpha z}\right) \right\}$$

نقاط غیرتحلیلی در نیم صفحه فوقانی ($\alpha > 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\alpha x)\,dx = \mathrm{Im}\left\{ 2\pi i \sum \mathrm{Res}\left(f(z)e^{i\alpha z}\right) \right\}$$

نقاط غیرتحلیلی در نیم صفحه فوقانی ($\alpha > 0$)

EX. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = ?$

روش اول: $? = \left[\mathrm{Arctan}\,x\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

روش دوم: ← (به جای x، z می‌نویسیم) اولین کار برد به صورت است

$z^2+1 = 0 \overset{\text{غیرتحلیلی}}{\Rightarrow} z = \pm i \rightarrow (z = i)$ در نیم صفحه فوقانی است

$$\underset{z=i}{\mathrm{Res}}\left(\frac{1}{z^2+1}\right) = \left.\frac{1}{2z}\right|_{z=i} = \frac{1}{2i}$$

(صورت: p، مخرج: q)

$$? = 2\pi i \times \frac{1}{2i} = \pi$$

WWW.BMESTU.IR| دانشجویان مهندسی پزشکی

Ex. $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$

انتگرال ۰ تا ∞ حتماً تابع زوج است و به ∞- تا ∞ تبدیل می‌کنیم:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+5x^2+4} = I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$$

حال چون تابع کسری است و توان مخرج حداقل ۲ واحد بیشتر از توان صورت است و ریشه حقیقی در مخرج نداریم داریم:

$$z^4+5z^2+4=0 \Rightarrow (z^2+1)(z^2+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} z=\pm i \\ z=\pm 2i \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} z=+i & \text{در نیم صفحه فوقانی} \\ z=+2i & \text{در نیم صفحه فوقانی} \end{cases}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i}\left(\frac{1 \; (p)}{z^4+5z^2+4 \; (q)}\right) = \frac{1}{4z^3+10z}\Big|_{z=i} = \frac{1}{6i}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2i}\left(\frac{1 \; (p)}{z^4+5z^2+4 \; (q)}\right) = \frac{1}{4z^3+10z}\Big|_{z=2i} = \frac{1}{-32i+20i} = \frac{-1}{12i}$$

$$I = \frac{1}{2} \times 2\pi i\left(\frac{1}{6i} + \frac{-1}{12i}\right) = \frac{\pi}{12}$$

PAPCO

چون تابع زوج است.

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۱۶.۱

Ex. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = ?$

$z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z = \pm 2i \longrightarrow z = 2i$: در نیم صفحهٔ فوقانی

* چون توان بیشتر از ۱ و چون عامل ۲i داریم اعداد مزدوج می‌نویسیم

$$\underset{z=2i}{\mathrm{Res}} \left(\frac{1}{(z^2+4)^2} \right) = \underset{z=2i}{\mathrm{Res}} \left(\frac{1}{(z-2i)^{2}(z+2i)^2} \right) =$$

$m = 2$

$$= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 2i} \left[(z-2i)^2 \times \frac{1}{(z-2i)^2 (z+2i)^2} \right]'$$

$$= \lim_{z \to 2i} \frac{-2}{(z+2i)^3} = \frac{-2}{-64i} = \frac{1}{32i}$$

$$? = 2\pi i \times \frac{1}{32i} = \frac{\pi}{16}$$

PAPCO

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Ex. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(2x)}{4x^4+13x^2+9}\,dx = ?$ (۲ → α)

(اسط پنجم (ص ۲۵۳

اولین کار مهم چاپش نقاط غیرتحلیلی است و در مثالهای ۴ به جای sin و cos ، e^{iaz} نوشته و سپس Res گرفته ، اگر sin ای بود Im و اگر cos ای بود Re می‌گیریم :

$$4x^4+13x^2+9=0 \Rightarrow z^2=\frac{-13\pm\sqrt{169-144}}{8} \Rightarrow \begin{cases} z^2=\dfrac{-13+5}{8}=-1 \rightarrow z=\pm i \\ z^2=\dfrac{-13-5}{8}=-\dfrac{9}{4} \rightarrow z=\pm\dfrac{3}{2}i \end{cases}$$

$z=i$ و $z=\frac{3}{2}i$ در نیم صفحهٔ فوقانی قرار دارند :

$$\underset{z=i}{\mathrm{Res}}\left(\frac{e^{i2z}}{4z^4+13z^2+9}\right)=\frac{e^{i2z}}{16z^3+26z}\Bigg|_{z=i}=\frac{e^{-2}}{-16i+26i}=\frac{e^{-2}}{10i}$$

($e^{i2z} \rightarrow p$ ، مخرج $\rightarrow q$)

$$\underset{z=\frac{3}{2}i}{\mathrm{Res}}\left(\frac{e^{i2z}}{4z^4+13z^2+9}\right)=\frac{e^{i2z}}{16z^3+26z}\Bigg|_{z=\frac{3}{2}i}=\frac{e^{-3}}{-54i+39i}=\frac{-e^{-3}}{15i}$$

($e^{i2z} \rightarrow p$ ، مخرج $\rightarrow q'$)

چون تابع زوج است ← $\frac{1}{2}$

$$?=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left[2\pi i\times\left(\frac{e^{-2}}{10i}+\frac{-e^{-3}}{15i}\right)\right]=\pi\left(\frac{e^{-2}}{10}-\frac{e^{-3}}{15}\right)$$

چون i ندارد قسمت Re (واقعی) کل عبارت می‌شود.

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

مثال صـ ۱۱۹

EX $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2+x+1}\, dx$

ما هم تمام مثال های قبل، نقاط غیر تحلیلی می‌گیریم.

$z^2+z+1=0 \longrightarrow z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\longrightarrow z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ در نیم صفحه فوقانی

$\text{Res}_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{e^{i2z}}{z^2+z+1}\right)=\frac{e^{i2z}}{2z+1}\Bigg|_{z=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{e^{-i-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}\,i}$

(صورت: p، مخرج: q)

چون سینوسی است

$P=\text{Im}\left\{2\pi i\times\frac{e^{-\sqrt{3}-i}}{\sqrt{3}\,i}\right\}=\text{Im}\left\{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}e^{-i}\right\}$ اویلر می‌زنیم $\longrightarrow$

$=\text{Im}\left\{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}\left(\cos(1)-i\sin(1)\right)\right\}=-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}\sin(1)$

چون ضریب i در e^{ix} برابر ۱ می‌باشد.

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۱۹/۱

*سؤال امتحان ترم قبل:

Ex $\int_0^\infty \frac{x^2\cos(2x)}{x^4+1}\,dx = ?$

$\int_0^\infty \frac{x^2\cos(2x)}{x^4+1}\,dx = ? = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\cos(2x)}{x^4+1}\,dx$

روش اول حل معادله درجه بالا: $\omega^n = z$ ← معادله درجه ۴ ← $z^4+1=0$

روش دوم: اتحاد اول را به کار می‌بریم:

$(z^2+1)^2 - 2z^2 = 0 \xrightarrow{\text{مزدوج}} (z^2+\sqrt{2}z+1)(z^2-\sqrt{2}z+1) = 0$

نقاط تغییر →
$$\begin{cases} z^2+\sqrt{2}z+1=0 \longrightarrow z = \frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2} = \frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z^2-\sqrt{2}z+1=0 \longrightarrow z = \frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-4}}{2} = \frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ در نیم صفحه فوقانی قرار دارند:

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{z^2e^{i2z}}{z^4+1}\right) = \frac{z^2e^{i2z}}{4z^3} = \frac{e^{i2z}}{4z}\Bigg|_{z=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{e^{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}}$$

(p: صورت، q: مخرج)

$$\operatorname{Res}_{z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{z^2e^{i2z}}{z^4+1}\right) = \frac{e^{i2z}}{4z}\Bigg|_{z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{e^{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}}{-2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}}$$

(p: صورت، q: مخرج)

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۱۶/۱

ادامه حل:

(چون سینوسی) (چون تابع زوج)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left\{2\pi i\left(\frac{e^{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}}+\frac{e^{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}}{-2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{\pi i e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\cos(\sqrt{2})+i\sin(\sqrt{2})}{1+i}+\frac{\cos(\sqrt{2})-i\sin\sqrt{2}}{-1+i}\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left\{\frac{\pi i e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\times\frac{(\cos\sqrt{2})+i\sin(\sqrt{2})(-1+i)+\cos(\sqrt{2})-i\sin(\sqrt{2})(1+i)}{-2}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left\{\frac{-\pi i e^{-\sqrt{2}}}{4\sqrt{2}}\left(-\cos\sqrt{2}+i\cos(\sqrt{2})-i\sin(\sqrt{2})-\sin(\sqrt{2})+\cos\sqrt{2}+i\cos(\sqrt{2})-i\sin(\sqrt{2})+\sin\sqrt{2}\right)\right\}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{-\pi i e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\left(i\cos(\sqrt{2})-i\sin(\sqrt{2})\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi e^{-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\sqrt{2}-i\sin\sqrt{2}\right)$$

WWW.BMESTU.IR|دانشجویان مهندسی پزشکی

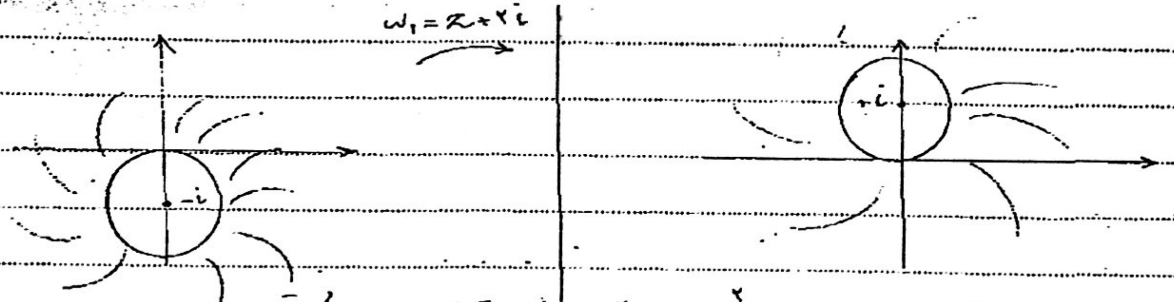
مثال امتحان ترم قبل:

دایره‌ای به مرکز (۰،-۱) — خارج*

مشخص کنید $w = i\left(\frac{z}{z+2i}\right)$ ناحیه $|z+i|>1$ را به چه ناحیه‌ای می‌نگارد؟

نگاشت فوق، نگاشت موبیوسی است که از z ... گرفته است.

$$w = i\left(\frac{(z+2i)-2i}{z+2i}\right) = i\left(1-\frac{2i}{z+2i}\right) = i + \frac{2}{z+2i} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = z+2i & \text{انتقال} \\ w_2 = \frac{1}{w_1} & \text{انعکاس} \\ w_3 = 2w_2 & \text{دوران} \\ w = i + w_3 & \text{انتقال} \end{cases}$$

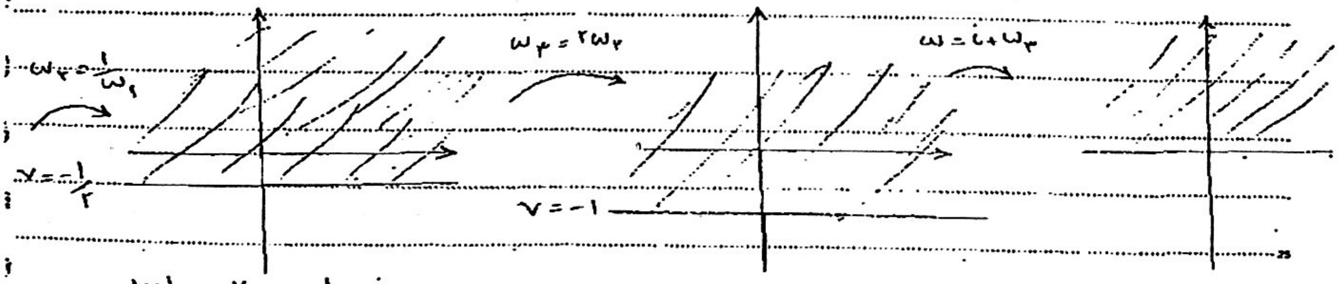


بهتر است فرم دکارتی را بنویسیم → $x^2+(y-1)^2 \geq 1 \rightarrow x^2+y^2 \geq 2y$

$$\left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{-v}{u^2+v^2}\right)^2 \geq \frac{-2v}{u^2+v^2}$$

$$\frac{1}{u^2+v^2} \geq \frac{-2v}{u^2+v^2} \Rightarrow -2v \leq 1$$

$$\Rightarrow v \geq -\frac{1}{2}$$



مبدأ $|2| = 2$

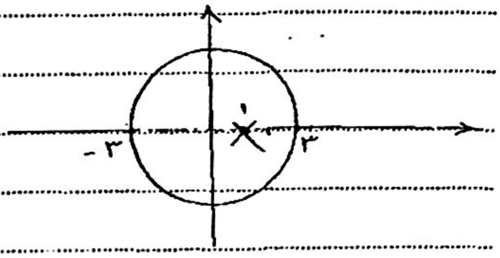
$\arg(2)$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۱۶/۱

مثال صفحه ۲۰۵۱:

EX $\oint_{|z|=3} (z-1)^3 \cos\left(\frac{z}{z-1}\right) dz$



$z-1=0 \Rightarrow z_0=1$ نقطه غیر تحلیلی

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\left((z-1)^3\cos\left(\frac{z}{z-1}\right)\right)$$

$$\cos\left(\frac{(z-1)+1}{z-1}\right)=\cos\left(1+\frac{1}{z-1}\right)=\cos(1)\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)-\sin(1)\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

باید کاری کنیم تا توان‌های $(z-1)$ منفی بشه

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}-\dots$$

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right)=1-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{24z^4}-\dots$$

$$\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)=1-\frac{1}{2(z-1)^2}+\frac{1}{24(z-1)^4}-\dots$$

دفتر فنی ایلیا ۳۳۶۹۸۷۲۱ ۴۵ متری ده دقیقه پاسخ دانشجو پارک

$$(z-1)^3\cos\left(\frac{1}{z-1}\right)=(z-1)^3-\frac{z-1}{2}+\frac{1}{24(z-1)}-\dots \qquad c_{-1}=\frac{1}{24}$$

$$\sin z = z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\dots$$

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z}-\frac{1}{6z^3}+\frac{1}{120z^5}-\dots$$

WWW.BMESTU.IR | دانشجویان مهندسی پزشکی

Subject:
Year. ۸۵ Month. ۳ Date. ۱۶

$$\sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{6(z-1)^3} + \frac{1}{120(z-1)^5} - \cdots$$

$$(z-1)^3 \sin\left(\frac{1}{z-1}\right) = (z-1)^2 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120(z-1)^2} - \cdots \qquad c_{-1} = 0$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\left((z-1)^3 \cos\left(\frac{z}{z-1}\right)\right) = \frac{\cos(1)}{24}$$

$$I = 2\pi i \, \frac{\cos(1)}{24} = \frac{\pi i}{12}\cos(1)$$

حذفیات کتاب:

قسمت ۲-۲ صفحه ۲۶

تبدیل فضای متناهی در کنش ۲-۴

قسمت ۳-۳-۱۵ تا آخر فصل حذف است.

قسمت ۹-۷-۵ صفحه ۱۲۰

دفتر فنی ایلیا ۶۶۹۸۷۲۱

PAPCO